This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
  A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.
- Evite consultas automatizadas.
  Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento ótico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.
- Mantenha a atribuição.
  A "marca dágua" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.
- Mantenha os padrões legais.
  Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As conseqüências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em `http://books.google.com/`

Math 499.07

Bourn

MAR 18 [illegible] 09

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Gratis

MATHEMATICA OU LOGICA

APONTAMENTOS DE ARITHMETICA

COMPILADOS

PELO

CAPITÃO DE ENGENHEIROS MANOEL DE ALMEIDA CAVALCANTI

Ex-coadjuvante do ensino theorico
da extincta Escola Militar e adjuncto da mesma Escola
em exercicio no Collegio Militar

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1907

MATHEMATICA OU LOGICA

APONTAMENTOS DE ARITHMETICA

COMPILADOS

PELO

Capitão de Engenheiros Manoel de Almeida Cavalcanti

Ex-coadjuvante do ensino theorico
da extincta Escola Militar e adjuncto da mesma Escola
em exercicio no Collegio Militar

RIO DE JANEIRO
IMPRENSA NACIONAL
1907

5930 — 06

13722
math 499.07 ~~509.07~~

Gratis.

A' Mulher Brazileira

na pessôa de minha terna e dedicada esposa,

A. Olinda Cavalcanti,

cuja preponderancia moral levou-me a rever e publicar este trabalho, que se destina especialmente á educação do seu sexo.

Rio de Janeiro, 5 de Novembro de 1906.

M. DE ALMEIDA CAVALCANTI.

(N. em Palmeira, Alagôas, em 11 de Dezembro de 1865).

(Villa Olinda — Leme)

PREFACIO

Estes *Apontamentos* representam, em grande parte, as lições que professei na Escola Militar da Capital Federal em 1897.

Não encerram nenhuma originalidade, nem os julgo isentos de faltas.

Escrevi-os, antes de tudo, para auxiliar aos meus discipulos; porém, mesmo assim, não o teria feito, si uma coincidencia feliz não viesse em meu auxilio. Ao mesmo tempo que iniciava as minhas lições, o eminente Sr. R. Teixeira Mendes encetava a exposição do mesmo assumpto em conferencias publicas, na séde do Apostolado Positivista do Brazil.

Lembrei-me então de frequentar esse curso philosophico e utilisar delle o mais que fosse possivel, dentro dos limites traçados pelo programma official da aula a meu cargo.

Assim o fiz, convencido de que, em taes condições, podia transmittir aos meus discipulos alguma cousa de aproveitavel.

E' escusado dizer que lutei com grandes difficuldades para conciliar, tanto quanto possivel, o plano de A. Comte com as exigencias do programma official.

A *Introducção*, que adiante se encontra, foi a unica sahida que descobri para supprir, tanto quanto possivel, a ausencia da Philosophia Primeira no mesmo programma.

A deficiencia deste levou-me tambem a supprimir o «Desenvolvimento historico da theoria subjectiva dos numeros», bem como sua *systematisação definitiva*, de que apenas dou na *Conclusão* um breve resumo; o que fiz com pezar, por ser esta uma das partes mais interessantes da sciencia.

Estas e outras lacunas mostram desde logo que não tive a pretenção de reproduzir fiel e integralmente as lições do digno discipulo de A. Comte a quem acima me refiro.

Estou, porém, persuadido de que os incompletos apontamentos que consegui tomar, e que ornam este trabalho, já dão uma idéa sufficiente da superioridade do ensino segundo as vistas do incomparavel philosopho francez.

De modo que, si estes *Apontamentos* não corresponderem sufficientemente ao destino que tive em vista, restar-me-á a esperança de que talvez solicite a attenção dos dignos professores para a unica doutrina capaz de dirigir convenientemente a educação da mocidade.

Devo, por fim, declarar que estas lições só exigem do leitor a preparação ordinariamente adquirida nas nossas aulas primarias, sem excluir a pratica das operações arithmeticas, o que felizmente já se vai divulgando entre nós.

O fim principal deste trabalho é ensinar a raciocinar raciocinando sobre as theorias do calculo arithmetico, cuja pratica essencial já suppõe. Mas, para que esse *desideratum* seja conseguido, é indispensavel que os discipulos sejam assistidos por professores syntheticos.

Sómente por intermedio delles, é que estes apontamentos deverão ser vulgarisados.

Aliás esta prescripção não deve admirar a ninguem ; porque, si os livros fossem escriptos directamente para os discipulos, a funcção nobilissima do mestre não teria logar na sociedade.

....

Resta-me sómente dizer algumas palavras sobre o plano deste livro.

E' dividido em tres partes, a 1ª geral, a 2ª fundamental e a 3ª especial. Estas subdividem-se em doze capitulos, que se elevarão a quatorze, si computarmos nesse numero a *Introducção* e a *Conclusão*.

Cada capitulo decompõe-se, por sua vez, em tres paragraphos e cada um destes em sete secções (excepto os tres primeiros paragraphos que contêm, apenas tres).

Juntando as lettras iniciaes das secções successivas obtem-se palavras e mesmo phrases, a que dou, sobretudo, um objectivo moral.

Não consegui regularisar o numero de grupos de phrases e de lettras de cada phrase, conforme quer A. Comte nas composições normaes deste genero. Julguei conveniente numerar as paginas no systema decimal e as secções no septimal, ambas com os caracteres usuaes. Mas, os capitulos são ordenados em algarismos romanos e os paragraphos com caracteres gregos; de sorte que o conjuncto das notações mais usadas no passado e no presente acha-se ahi representado com as do futuro.

Obedecendo ás prescripções de A. Comte, supprimi deste trabalho a theoria das progressões geometricas e a dos logarithmos, bem como todas as doutrinas que, embora figurem actualmente nos programmas de Arithmetica, só podem ser convenientemente expostas no Calculo Algebrico.

Portanto, é escusado dizer que não acompanho aquelles que, confundindo o ponto de vista da Algebra com o da Arithmetica, empregam erradamente nesta os signaes ou symbolos daquella.

Esta deploravel confusão não só difficulta o ensino, como impede que o ponto de vista dos *valores* faça espontaneamente surgir no espirito dos alumnos a necessidade de elaborar as *relações numericas*. O emprego da linguagem algebrica no Calculo Arithmetico é nesta parte a mais flagrante violação dos preceitos do grande legislador mathematico.

INTRODUCÇÃO

Conhecer para prever, afim de prover.

A. COMTE

Explicar o Mundo e o Homem eis o duplo e continuo objecto de todos os nossos pensamentos theoricos e praticos. A theoria e a pratica concorrem assim para um mesmo fim, porque o alvo de todas as nossas especulações é sempre prever os acontecimentos, no intuito de melhor supportal-os e sobretudo para modifical-os, quando seja possivel.

Comquanto esta acção modificadora tenha em vista os seres, o conhecimento destes torna-se muito complexo para ser directamente abordado. Nestas condições, o unico recurso de que dispomos consiste em decompôr o estudo dos seres nos estudos dos diversos acontecimentos ou phenomenos geraes que caracterisam a existencia de cada um delles.

Embora os phenomenos só se manifestem em suas sédes, nós podemos estudal-os independentemente dellas. Generalisando por *abstracção*, eliminamos cada phenomeno de todos aquelles de que é realmente acompanhado para reunil-o aos similhantes que se apresentam em todos os outros casos.

Uma tal separação ou *abstracção* é de todo indispensavel; porque, si taes phenomenos fossem observados nos proprios seres, a diversidade destes não permittiria ao nosso espirito noções fixas e geraes, de onde surgissem previsões capazes de guiar o nosso poder interventor.

Concebe-se, ao contrario, que, isolando os phenomenos de suas sédes respectivas, o espirito póde approximal-os, com-

paral-os e, desde então, apprehender suas *relações constantes de successão ou de similhança,* aptas á previsão de uns pelos outros.

A estas relações é que chamamos *leis, e o estudo das leis dos phenomenos* constitue o objecto da *Sciencia,* que é, portanto, essencialmente abstracta.

« Embora uma tal abstracção altere mais ou menos a realidade das nossas concepções, cumpre que acceitemos resignados taes inconvenientes afim de ministrar á nossa intelligencia regras que nunca falhem. » (*)

Demais, esse caracter abstracto da sciencia não impede que suas leis geraes, a respeito das categorias pouco numerosas que abrangem todos os phenomenos observaveis, bastem por sua combinação para explicar toda a economia concreta.

E' verdade que assim não poderemos conhecer a realidade, tal qual é em absoluto.

Isto, porém, não impede que se construa uma imagem capaz de satisfazer ao conjuncto de nossa natureza e de nossa situação. A sciencia tem apenas este nobre destino. Mas, como póde succeder que um tal estudo, mesmo assim restricto, dê logar a divagações, mistér se torna fazel-o convergir para a vida activa, tomando o serviço social como a medida da extensão que se deve dar a theorias quaesquer.

O destino e a natureza abstracta da *sciencia* estando assim caracterisados, vamos agora apreciar os elementos de que ella se compõe.

Esta apreciação resulta immediatamente das considerações acima; porque, substituindo, como vimos, o estudo dos sêres pelos dos phenomenos, é claro que teremos de considerar tantas sciencias distinctas quantas forem as categorias de phenomenos verdadeiramente irreductiveis, que pudermos observar no conjuncto dos mesmos seres.

(*) A Comte.— Cat. Positivista.

Dispondo em seguida essas categorias naturaes, de tal maneira que o estudo de cada uma seja fundado sobre o conhecimento das leis principaes da precedente, e torne-se o fundamento da subsequente, é obvio que teremos tambem a melhor ordem a seguir no seu estudo.

Ora, uma tal ordem é determinada pelo gráo de simplicidade, ou, o que é o mesmo, de generalidade dos phenomenos, donde resulta sua dependencia successiva, e, por conseguinte, a facilidade maior ou menor de seu estudo.

Com effeito, concebe-se, *á priori*, que os phenomenos mais simples são tambem os mais geraes; porquanto aquillo que se observa no maior numero de casos é, por isso mesmo, isento das circumstancias proprias a cada caso separado.

Devemos, portanto, começar pelo estudo dos phenomenos os mais geraes e os mais simples, para em seguida abordarmos successivamente os mais particulares ou os mais complicados.

Tal deve ser a marcha mais methodica ; porque esta ordem de generalidade ou de simplicidade, determinando o encadeamento racional das sciencias pela dependencia successiva de seus phenomenos, fixa desta fórma seu gráo de facilidade.

Tendo descoberto este importante preceito, e contemplando o conjuncto dos phenomenos naturaes verdadeiramente irreductiveis, A. Comte foi levado a classificar do seguinte modo o conjuncto dos nossos conhecimentos theoricos: Mathematica, Astronomia, Physica, Chimica, Biologia, Sociologia e Moral.

Cada termo desta serie repousa sobre o precedente e experimenta a reacção do subsequente, de sorte que esta classificação marca, não só a ordem de complexidade crescente dos phenomenos, como a de sua modificabilidade correspondente; porque a alteração de cada classe de phenomenos se compõe

das variações que lhe são proprias, addicionadas áquellas que resultam das mudanças nos phenomenos inferiores e das reacções devidas aos superiores.

Todos os phenomenos apreciaveis ficam assim grupados segundo sua dependencia mutua, de modo que *os mais nobres se acham por toda parte subordinados aos mais grosseiros.*

Esta propriedade traduz o unico laço objectivo da ordem universal, cuja concepção systematica é constituida por esta serie. Mas, além desta propriedade scientifica, a escala encyclopedica possue uma importante propriedade logica : ella indica por sua vez a marcha necessaria da educação theorica e o surto gradual do verdadeiro raciocinio.

Porque não se aprende a raciocinar sinão raciocinando e, portanto, o methodo positivo só póde ser plenamente apreciado estudando-se o conjuncto das sete sciencias.

Comquanto raciocinemos sempre segundo um methodo uniforme, nós desenvolvemos mais os processos logicos correspondentes, á medida que augmenta a complexidade dos phenomenos.

Estes processos logicos são a *inducção*, a *deducção* e a *construcção*, cuja successão necessaria constitue a marcha regular do verdadeiro raciocinio, segundo a formula de A. Comte :

Induzir para deduzir afim de construir

Nós podemos immediatamente deduzir quando as especulações são bastante simples para que os *seus principios sejam espontaneamente apreciaveis.*

E' o que acontece em Mathematica, onde as inducções são quasi sempre espontaneas.

Ao contrario, a inducção prevalece si a instituição dos pontos de partida tem mais apreço e embaraço que o desenvolvimento das consequencias.

E' o que acontece a partir da Astronomia, onde se sente desde logo a necessidade de uma base inductiva, que se torna cada vez mais difficil de apanhar no meio das nossas observações concretas. E' exactamente por isto que a complicação crescente dos phenomenos nos faz desenvolver successivamente diversos modos de inducção.

Depois de uma serie de preparações, estas duas partes analyticas do methodo positivo (inducção e deducção) fazem surgir uma terceira, essencialmente synthetica, representada pela *construcção*, que vem assim completal-o no dominio da Moral.

«Principalmente deductivo no seu berço mathematico, o methodo positivo torna-se cada vez mais inductivo á medida que attinge especulações mais eminentes.

Nesta longa elaboração cumpre distinguir diversos gráos essenciaes, em que a complicação crescente dos phenomenos nos faz desenvolver successivamente a *observação* em Astronomia, a *experimentação* em Physica e a *nomenclatura* em Chimica.

Todavia, é na Biologia e na Sociologia que o methodo inductivo se completa, pois é ahi que elle desenvolve os seus modos mais transcendentes, representados pela *comparação* biologica e pela *filiação* sociologica.

E' depois de passarem por esta serie de preparações objectivas que os dois elementos do methodo positivo (a *deducção* e a *inducção*) fazem surgir o terceiro, essencialmente snbjectivo, representado pela *construcção*, que se torna o supremo regulador do entendimento humano, permittindo coordenar na synthese moral todos os materiaes emanados da analyse theorica.»

Distinguindo, como fizemos, os differentes modos de inducção, verifica-se immediatamente que a successão dos sete gráos logicos torna-se exactamente conforme á dos sete gráos scientificos.

E' assim que cada uma destas sete phases logicas absorve espontaneamente todas as que a precedem, em virtude da subordinação natural dos respectivos phenomenos.

Estes tres gráos essenciaes da elaboração mental, representados pela inducção, deducção e construcção, acham-se em perfeita harmonia com os seus tres meios geraes. Emquanto a inducção prevalece, a assistencia logica deve directamente emanar dos *signaes*, porque a expressão facilita a concepção.

Uma inducção difficil tem, sobretudo, necessidade de *imagens*, sendo os *signaes* simples auxiliares.

Mas, desde que a *construcção* succede á dupla preparação dos materiaes, o *sentimento* deve abertamente desenvolver sua supremacia latente, porque só elle póde coordenar.— *Sentimentos, imagens e signaes* — taes são os tres meios geraes que, no exercicio normal de nossa intelligencia, concorrem sempre para inspirar-nos as concepções que mais convêm ás nossas necessidades moraes, intellectuaes e praticas.

São estas as mais importantes propriedades logicas e scientificas da escala encyclopedica estabelecida por A. Comte.

« A meditação desta hierarchia conduziu, finalmente, A. Comte a formular quinze leis communs a todos os phenomenos e como taes independentes da classificação destes. (V. o quadro abaixo.)

Ao conjuncto destas quinze leis universaes, precedidas da *theoria da abstracção*, elle consagrou o qualificativo de *Philosophia Primeira*; ao conjuncto da hierarchia scientifica elle denominou *Philosophia Segunda*. O ultimo termo desta é a Moral, que se subdivide em Moral Theorica ou *theoria da natureza humana,* e em Moral Pratica, que systematisa a cultura desta natureza. E' neste gráo culminante da escala encyclopedica que se effectua a passagem da *theoria* para a *pratica* ou da *sciencia* para a *arte*.

Chega-se assim á ultima classe de especulações, onde se aprecia a acção geral da Humanidade sobre a Terra. Tal é o objecto do que A. Comte denominou *Philosophia Terceira*, que fecha assim o cyclo dos conhecimentos geraes indispensaveis, toda e qualquer outra especificação devendo ser deixada ás inspirações da pratica.» (*)

QUADRO DAS QUINZE LEIS DE PHILOSOPHIA PRIMEIRA

SECÇÃO MAIS SUBJECTIVA

Primeiro grupo, tanto objectivo como subjectivo

1ª Formar a hypothese mais simples, mais sympathica e mais esthetica que comporta o conjuncto dos dados a representar. (I)

2ª Conceber como immutaveis as leis quaesquer que regem os seres pelos acontecimentos, posto que só a ordem abstracta permitta aprecial-os. (II)

3ª As modificações quaesquer da ordem universal limitam-se sempre á intensidade dos phenomenos cujo arranjo persiste inalteravel. (III)

Segundo grupo, essencialmente subjectivo

1ª serie, leis estaticas do entendimento.

1ª Subordinar as construcções subjectivas aos materiaes objectivos. (Aristoteles, Leibnitz, Kant). (IV)

2ª As imagens interiores são sempre menos vivas e menos nitidas que as impressões exteriores. (V)

3ª A imagem normal deve preponderar sobre aquella que a agitação cerebral faz simultaneamente surgir. (VI)

2ª serie, leis dynamicas do entendimento.

1ª Todas as nossas concepções passam por tres estados, ficticio, abstracto e positivo, mas com uma velocidade proporcionada á generalidade, tanto objectiva como subjectiva, dos phenomenos correspondentes. (VII)

2ª A actividade pratica é a principio conquistadora, depois defensiva e emfim industrial. (VIII)

3ª A sociabilidade é a principio domestica, depois civica e emfim universal, segundo a natureza peculiar a cada um dos tres instinctos sympathicos. (IX)

(*) Teixeira Mendes.— *La Philosophie Chimique d'après Aug. Comte.* Introduction.

Terceiro grupo, sobretudo objectivo

SECÇÃO MAIS OBJECTIVA

1ª serie, a mais objectiva da Philosophia Primeira.

1ª Todo estado estatico ou dynamico tende a persistir espontaneamente, sem alteração alguma, resistindo ás perturbações exteriores. (Kepler). (X)

2ª Um systema qualquer mantem a sua constituição activa ou passiva quando os seus elementos experimentam mutações simultaneas, comtanto que estas lhes sejam exactamente communs. (Galileu). (XI)

3ª Existe por toda a parte uma equivalencia necessaria entre a reacção e a acção, si a intensidade de ambas fôr medida conforme a natureza de cada conflicto. (Newton ou melhor Huyghens). (XII)

2ª serie, mais subjectiva que a precedente.

1ª Subordinar por toda a parte a theoria do movimento á da existencia, concebendo todo o progresso como desenvolvimento da ordem correspondente, cujas condições quaesquer regem as mutações que constituem a evolução. (XIII)

2ª Todo o classamento procede segundo a generalidade crescente ou decrescente, tanto subjectiva como objectiva. (XIV)

3ª Todo intermedio está subordinado aos dois extremos cuja ligação opéra. (XV)

MATHEMATICA OU LOGICA

APONTAMENTOS DE ARITHMETICA

PRIMEIRA PARTE

CAPITULO I

Apreciação geral

Concepção da Mathematica; posição do seu estudo, dondo a apreciação do lugar que occupa a Arithmetica no conjuncto do saber humano.

§ α' (1)

Concepção da Mathematica; posição do seu estudo

1. — **A'** similhança dos antigos, pode-se hoje classificar todos os conhecimentos scientificos em : *Logica, Physica* e *Moral*.

Dando a estas palavras uma accepção consoante ao gráo de desenvolvimento a que chegou o saber theorico da humanidade, chama-se Logica á *unica sciencia* que os gregos conheceram a principio e por isto qualificaram pela palavra *Mathematica*, que directamente offerece uma tal significação (1a).

Sendo a mais antiga das sciencias, foi, por isso, mesmo a que primeiro iniciou a apreciação abstracta da ordem universal ahi considerada sómente nos seus attributos mais simples, isto é, o *numero*, a *extensão* e o *movimento*, unicos que se encontram por toda a parte, desde a ordem material, até a ordem humana.

---

(1) Lettra alpha, primeira do alphabeto grego, que assim accentuada exprime o numero 1, (*eis, mia, enn*).

(1a) Do grego mathematos, sciencia.

Mas, em consequencia mesmo da inteira simplicidade desse dominio, a mathematica adquiriu um destino muito mais elevado, por manifestar desde logo a marcha regular do verdadeiro raciocinio, conforme o lembrará sempre o nome caracteristico de Logica que de novo lhe deu Augusto Comte (1b). Sob o nome de Physica, comprehende-se a sciencia que estuda directamente o conjuncto da ordem material.

Ella abrange a Physica Celeste ou Astronomia, bem como a Physica Terrestre, que, por sua vez, se compõe tambem da Physica Geral ou Physica propriamente dita e da Physica Especial ou Chimica.

Finalmente se designa sob o nome de Moral a sciencia que estuda a ordem humana. Ella comprehende um preambulo geral representado pela Biologia e um campo proprio formado pela Sociologia; sendo que esta abrange por seu turno a Sociologia e a Moral, propriamente ditas, conforme considera a sociedade em seu conjuncto, ou em seus elementos.

Assim chega-se novamente á escala encyclopedica estabelecida por A. Comte, onde as sete sciencias, desde a Logica até a Moral, acham-se classificadas segundo a simplicidade decrescente e a complicação crescente dos phenomenos correspondentes.

(1b) Chamando de *logica* a sciencia do Espaço, nosso Mestre apenas *reiterou* a denominação com que os gregos caracterisavam o *calculo*. Com effeito λόγος (lógos e seus derivados possuem a significação de *calculo* e seus precedentes: αριθμητικη (arithmetike) designava a *theoria* do calculo, λογιστικ (logistiké) a pratica do calculo).

Durante muito tempo os modernos chamaram *logistica numerosa*, o calculo arithmetico, o *logistica speciosa*, o calculo algebrico. Em portuguez, *razão*, outro significado de λόγος (lógos), equivale tambem á *proporção*, *relação numerica;* e *calcular* é empregado ordinariamente com a significação de *meditar*, *raciocinar*.

A palavra *logaritmico* conservada na linguagem algebrica annunciou e preparou a reforma do nosso Mestre. (Teixeira Mendes, Ensino Positivista no Brasil.)

Hierarchia scientifica	I—Logica ou Mathematica				1
	II—Physica.	Celeste ou Astronomia			2
		Terrestre.	Geral ou Physica propriamento dita		3
			Especial ou Chimica		4
	III—Moral.	Preambulo.	Biologia. (Estudo geral da ordem vital)		5
		Campo proprio.	Sociologia.... (Estudo especial da ordem humana.)	Collectivo — Sociologia propriamente dita	6
				Individual — Moral propriamente dita	7

2. — Mostra-se no apice desta escala a Moral, cujo nome lembra o seu destino pratico. E' a sciencia que estuda o Homem, objecto final de todas as nossas especulações, para bem adaptal-o á sua funcção na sociedade.

Ora, si observar-se que a funcção social do individuo está essencialmente subordinada á sociedade em que elle vive, concluir-se-ha desde logo que o estudo da Moral depende do da sociedade, isto é, da Sociologia, que occupa por isso o segundo lugar na escala. Mas, a ordem social sendo por sua vez dominada pela ordem vital, por isso que os povos são seres eminentemente vivos, é obvio que o estudo da Sociologia está por seu turno subordinado ao dos phenomenos vitaes, isto é, á Biologia, a qual figura por isso em terceiro lugar na serie.

Porém si observar-se que os seres vivos apresentam os mesmos phenomenos de *composição* e de *decomposição* que os corpos inorganicos, e que por outro lado taes phenomenos não podem ser directamente apreciados nos animaes ou vegetaes, por causa da instabilidade com que ahi se apresentam, concluir-se-ha que é indispensavel aprecial-os nos corpos inorganicos.

Ora, esta apreciação pertencendo ao dominio chimico, vê-se que este estudo é indispensavel á Biologia, e eis porque acha-se collocada em quarto lugar na escala.

Attendendo porém que os phenomenos chimicos, de composição e decomposição, operam sob a influencia de phenomenos physicos, taes como calor, luz, electricidade, etc., exigindo muitas vezes para se manifestarem a intervenção humana, vê-se que o estudo da chimica depende immedia-

tamente do da physica, que por isso occupa o quinto lugar na escala.

Mas, assim como a Chimica depende da Physica, é evidente que esta ultima se acha por sua vez subordinada á Astronomia, isto é, ao estudo dos astros, porque estes podem modificar o estado da Terra, e portanto influir sobre as propriedades geraes das substancias que se acham na sua superficie.

Eis porque a Astronomia occupa o sexto lugar na escala.

Mas os astros sendo seres que só podem ser apreciados sobre o triplice ponto de vista do numero, da extensão e do movimento, isto é, sob o ponto de vista mathematico, é obvio que a Astronomia exige necessariamente um tal estudo.

Assim deve ser; porquanto, si os phenomenos numericos, geometricos e mecanicos não fossem apreciados isoladamente pela mathematica, o seu concurso nos seres celestes tornaria inaccessivel a apreciação das relações que lhes são proprias.

Ao contrario, estas podem ser descobertas em mathematica, mediante casos mais accessiveis, depois que se affasta, por abstracções successivas, o conjuncto dos demais attributos materiaes que complicam o seu estudo.

3.— A posição que fica assignalada ao dominio da mathematica na escala encyclopedica acima, mostra claramente que ella constitue a base espontanea de todas as outras sciencias.

Ella é, com effeito, a unica que não exigindo nenhuma outra, póde ser verdadeiramente erigida em um simples prolongamento da sabedoria popular.

Estudando os attributos universaes dos seres, com abstracções dos demais phenomenos que os acompanham, ella nos inicia no estudo do Mundo, base indispensavel ao estudo do Homem.

Mas sobretudo, disciplinando o nosso espirito, ella o torna apto para abordar successivamente os demais estudos prepa-

ratorios, elementos indispensaveis ao estudo final, que synthetisa na apreciação do homem todos os attributos anteriormente considerados na analyse theorica. E' o que justifica a sua denominação de Logica.

§ β' (2)

Objecto da Mathematica; sua constituição

4. — Motivando a posição da Mathematica ou Logica na hierarchia das sciencias, as considerações que para isso fizemos no paragrapho precedente, já nos mostram sufficientemente as condições em que deve ser concebida essa base logica e scientifica, de todos os nossos conhecimentos abstractos.

A Mathematica estuda directamente a existencia universal, reduzida ás suas propriedades mais simples sobre as quaes as sentam necessariamente todos os outros attributos reaes.

Estas propriedades fundamentaes de um ser qualquer são, como vimos, o *numero*, a *extensão* e o *movimento*.

Fundada sobre esta definição systematica, a sciencia mathematica se compõe necessariamente de tres partes que, sob os nomes de *Calculo, Geometria* e *Mecanica*, se occupam respectivamente destes tres attributos; sendo que o Calculo é a sciencia do *numero*, a Geometria a sciencia da *extensão* e a Mecanica a sciencia do *movimento*.

Esta constituição nos mostra que o principio hierarchico de Augusto Comte preside, não só á coordenação geral de todas as sciencias, como á propria distribuição interior de cada uma.

Com effeito, estes tres elementos irreductiveis da mathematica constituem uma progressão, ao mesmo tempo his-

---

(2) Lettra béta, que assim accentuada exprime o numero 2 (*duo*).

torica e dogmatica, essencialmente analoga áquella que nos apresenta o conjuncto da hierarchia encyclopedica.

« As ideias de numero são certamente mais universaes e mais simples que mesmo as de extensão, as quaes, por sua vez precedem, por motivos similhantes, ás ideias de movimento. »

E' assim que, em relação á maior parte dos astros, os nossos conhecimentos reaes reduzem-se, no fundo, a enumerações exactas, sem que possamos siquer verificar a extensão delles, que aliás pouco nos interessa.

5. — Além disso as noções numericas são as unicas applicaveis não só aos seres quaesquer, mas aos seus diversos phenomenos, desde os mais grosseiros até os mais sublimes.

E' assim que os numeros applicam-se até aos nossos proprios pensamentos, permittindo fixal-os, sem entretanto suscitar illusões serias a respeito da precisão que parecem indicar.

Elles permittem instituir approximações quaesquer, entre as quaes facilmente póde-se discernir as que são arbitrarias ou vagas, das que merecem verdadeira attenção.

Nossa infancia, e mesmo nossa adolescencia, utilisa muitas vezes essa aptidão para fixar e harmonisar o que percebemos, quando não é possivel apreciar as relações directas entre os objectos correspondentes (2a). Por isso é que vemos as crianças iniciarem seus conhecimentos abstractos por simples noções numericas, muito antes que alcancem meditar sobre attributos geometricos.

6. — Emfim quanto ao *movimento*, sem difficuldade sente-se o augmento de complicação e o decrescimo de generalidade que collocam o seu estudo no apice do dominio mathematico.

(2a) A. Comte — Cat. Positivista.

Foi por isso que a Mecanica só ficou constituida na idade moderna. Só então a descoberta do movimento terrestre, erigindo o nósso planeta em astro essencialmente activo, fez reconhecer que as existencias quaesquer que se manifestam numa tal séde, nunca podem ser verdadeiramente inertes, comportando apenas um repouso relativo.

De sorte que vemos a Mathematica estudar : no Calculo, as propriedades puramente numericas que são as mais geraes e as mais simples, como concernindo não sómente aos seres, mas ainda a todos os phenomenos ; e na Geometria as propriedades da extensão, que constituem a condição fundamental da existencia material. Mas, a Mathematica ficaria incompleta si o estudo da extensão, absorvendo o do numero, não fosse completado pelo estudo do movimento.

Apreciando assim a existencia mais simples e mais universal, a Mathematica nos permitte abordar o estudo da Astronomia, onde encontramos essa existencia concretisada em seres, nos quaes nenhum outro attributo essencial torna-se apreciavel :

Mathematica ou logica	**1 — Calculo** **2 — Geometria** **3 — Mecanica**

§ γ' (3)

Comparação dos tres elementos da Mathematica ; decomposição do calculo

10.— **P**ela comparação das tres partes essenciaes da Mathematica, reconhecemos que o *Calculo* tem sobretudo um destino logico, além de sua utilidade propria e directa.

---

(3) Lettra gamma, que assim accentuada exprime o numero 3 — (tréis, tria).

PAR

A sua aptidão essencial consiste, com effeito, em desenvolver tanto quanto possivel o nosso poder deductivo. Reduzido a este importante papel, elle introduz na Geometria e na Mecanica uma generalidade systematica, que desenvolve sua ligação mutua, sem alterar a doutrina respectiva, nem sua successão necessaria.

Mas, o Calculo só póde preencher essa missão, que se torna afinal seu mais importante attributo, decompondo-se por sua vez em duas partes, uma relativa aos valores *(Calculo dos valores)*, e outra destinada ás relações *(Calculo das relações)*. Destes dois ramos do calculo, o ultimo é o que tem maior importancia logica. Porque, em toda a questão mathematica, quer geometrica quer mecanica, a determinação de numeros desconhecidos, que sempre se tem em vista, exige necessariamente que se comece por elaborar suas *relações* com os numeros conhecidos, afim de pôr em evidencia seu modo de formação, sem considerar outros *valores* que não aquelles que modificam taes *relações*.

Sómente depois desse preambulo é que tem logar o calculo dos valores ou a avaliação, que constitue portanto o complemento do trabalho da Logica.

Embora só as questões muito simples permittam instituir uma separação completa entre estas duas phases proprias á toda questão de numeros, deve-se entretanto distinguir, em todos os casos, o ponto de vista dos valores ou arithmetico, do ponto de vista das relações ou algebrico.

Estas considerações já deixam perceber que o *Calculo Algebrico*, subordinando a elaboração das relações abstractas ao seu destino concreto, geometrico ou mecanico, aperfeiçôa o methodo sem alterar a doutrina, dando aos elementos mathematicos um gráo de ligação que não se conceberia sem elle.

E' por isso que, sob o ponto de vista logico, considera-se o Calculo como sendo o elemento mais importante da sciencia mathematica.

11.—A consideração da Mathematica, sob o aspecto scientifico, nos leva todavia a reconhecer que ella consiste sobretudo na Geometria e na Mecanica; porque só estas instituem directamente a theoria da existencia universal, primeiro passiva depois activa.

A Mecanica adquire assim muita importancia encyclopedica, como transição necessaria entre a Mathematica e a Physica, cujos caracteres respectivos nella se combinam profundamente.

Aqui, toda a instituição logica não parece ser apenas deductiva, como a faz suppor, na Geometria, a extrema facilidade das inducções indispensaveis.

Começa-se então a sentir distinctamente a necessidade de uma base inductiva, já difficil de apanhar-se no meio de nossas observações concretas, para permittir o surto das concepções abstractas que deverão referir a essa base o problema geral da composição e da communicação dos movimentos, de que se occupa a Mecanica.

12.— Emfim, aprofundando mais as considerações precedentes, facilmente se vê que a decomposição geral do Calculo, constitue a condição fundamental da systematisação mathematica.

De facto, esta systematisação resulta sobretudo de uma inteira combinação entre o Calculo Algebrico e a Geometria. Esta ultima, que a principio apenas estuda, por processos especiaes, as fórmas immediatamente emanadas da observação ou as que resultam destas por considerações muito simples, póde por fim abraçar no seu dominio fórmas quaesquer; e isto só é conseguido por intermedio do Calculo das relações.

Foi isto, com effeito, que permittiu substituir o estudo da diversidade das figuras geometricas, pelo estudo das relações correspondentes, entre as grandezas uniformes que definem qualquer dellas.

Desde então, as differentes questões geometricas foram submettidas a outros tantos methodos uniformes, necessariamente applicaveis a todas as figuras convenientemente definidas.

De sorte que a Algebra, limitada a principio a facilitar as deducções da *Geometria antiga* ou *especial*, tornou-se a base da coordenação que caracterisa a *Geometria moderna* ou *geral*, desenvolvendo uma aptidão tanto inductiva como deductiva.

Por uma reacção inversa, a nova Geometria desenvolveu por seu turno o Calculo Algebrico, impellindo-o para uma fórma transcendente que a devia logicamente ligar á Mecanica.

Esta Algebra transcendente surgiu, com effeito, nas especulações sobre a medida da extensão, quando o espirito humano, não podendo resolver directamente as questões relativas ás figuras curvilineas, procurou reduzil-as ao caso mais simples das figuras rectilineas.

Ora, comquanto esta Algebra indirecta se tenha mostrado impotente para resolver em Mecanica as questões especiaes, ella manifestou desde logo uma preciosa aptidão para desenvolver e coordenar as questões geraes, que constituem o principal objecto da Mecanica racional; de maneira que assim toda a sciencia mathematica ficou perfeitamente coordenada.

CAPITULO II

Theoria geral das concepções numericas: advento subjectivo de similhantes noções; alcance philosophico de sua transformação objectiva; importancia superior de seu destino politico e moral; donde, apreciação da verdadeira dignidade do Calculo Arithmetico, em virtude de seu papel no conjuncto da existencia humana.

§ δ' (4)

Advento Subjectivo das Concepções Numericas. Exame da linguagem sobre o aspecto numerico

13.— No capitulo precedente caracterisamos o *Calculo Arithmetico* pelo contraste que elle offerece com o Calculo Algebrico.

O *Calculo Arithmetico*, dissemos, é o Calculo dos *valores*, e o *Calculo Algebrico* o Calculo das *relações*. Como porém um tal confronto apenas attende á *destinação objectiva* do Calculo Arithmetico sem nenhuma referencia aos seus *usos subjectivos*, precisamos delinear mais precisamente o seu campo proprio.

Sente-se melhor similhante necessidade, notando-se que a distincção entre os dois aspectos do Calculo só se apresenta historicamente, depois de um consideravel surto das concepções numericas.

Antes mesmo de qualquer calculo, isto é, antes mesmo que o desenvolvimento social désse lugar á avaliação, mediante as combinações dos numeros, já estes tinham surgido *subjectivamente*, e dominavam o conjuncto dos pensamentos humanos.

---

(4) Lettra delta, que assim accentuada exprime o numero 4 (*téssaros*, *téssara*, ou *tétaros*, *tétara*).

14.—**Origem subjectiva das concepções numericas.** —Como todas as concepções humanas, as concepções numericas têm uma origem subjectiva. E assim devia ser; porque, nenhum ente podendo despertar mais a attenção do homem do que o proprio homem, era fatal que os primeiros conhecimentos resultassem da contemplação de nossa natureza.

Demais, foi sobre o homem, o ente sobre o qual mais interessa agir, que se verificou primeiro a efficacia das meditações humanas.

Depois de longamente experimentar sobre si mesma foi que a Humanidade procurou estender ao mundo as suas concepções.

Tal é, com effeito, a marcha que se verifica em todo o decurso de nossa evolução theorica, e que se póde particularmente constatar no que se refere ás concepções numericas.

A observação precedente deve parecer contradictoria, com o predominio habitual do ponto de vista objectivo na apreciação dos numeros. Quando se falla em numeros, o pensamento volta-se com effeito para o conjuncto das noções abstractas, especiaes, por meio das quaes a Humanidade fixou a concepção das diversas grandezas.

Assim tambem a palavra *calculo* nos recorda logo as especulações sobre essas noções, apezar de ser algumas vezes usada como synonimo de *raciocinio*.

Similhante habito, que não nos permitte apanhar todo o alcance das concepções numericas, nem nos deixa perceber como taes concepções poderam surgir, não é mais do que o resultado das surprehendentes applicações que os numeros tiveram no estudo da ordem exterior, sobretudo no que se refere aos phenomenos da extensão e do movimento, bem como a sua applicação á theoria dos astros.

Uma tal expansão objectiva fez esquecer o caracter inicial das concepções numericas; e a consequencia é que o espirito

humano tende a não ver nas noções mais universalmente empregadas senão concepções especialissimas.

15.— Tratemos de corrigir similhante tendencia mostrando directamente a universalidade das concepções numericas.

Isso se consegue facilmente mediante um exame summario da linguagem humana, sob o aspecto numerico, não pela apreciação especial da lingua de um povo, mas considerando a esse respeito todas as linguas no seu conjuncto.

Com effeito, para reconhecer o dominio dos numeros na linguagem humana, basta notar que todas as linguas compõem-se de palavras *variaveis* e *invariaveis*, sendo certo que as concepções numericas são incontestavelmente uma das fontes de taes variações.

E' assim que a variação dos *substantivos*, dos *adjectivos* e dos *verbos* acha-se ligada á distincção entre a *unidade* ou *singularidade* e a *collectividade* ou *pluralidade*.

E essa distincção domina mesmo a que resulta da separação entre os sexos, porque ella se encontra não só nas palavras *masculinas* e *femininas* como ainda naquellas em que similhante separação não se traduz.

Passando da consideração do conjuncto das linguas, para a consideração mais particular de certas palavras de cada lingua, somos levados a reconhecer o predominio ainda maior das concepções numericas.

E' assim que todas as palavras que nos idiomas modernos chamamos *pronomes*, *adjectivos*, *possessivos* e *verbos*, não sómente se mostram dominadas pelas noções de *singularidade* ou de *pluralidade*, de *um* ou de *muitos*, como ainda trazem em si o cunho particular dos tres primeiros numeros.

E' assim que a fórmula *tu* e seus derivados contém implicitamente a idéa de *dois*, do mesmo modo que o pronome *elle* e seus derivados contém a de *tres*.

16.— As phases anteriores (theologica e fetichica), por que passaram certas linguas conhecidas, ainda mais nos patenteiam o predominio dos numeros. Com effeito, ao passo que nos modernos idiomas cada palavra variavel só traduz em geral a distincção entre *um* e *muitos*, nas linguas antigas, como por exemplo na *grega*, encontramos uma variação intermediaria que se chama *dual*.

Hoje dizemos *homem* ou *homens*, conforme queremos exprimir que se trata de *um homem* ou de *muitos homens*, sem que tenhamos para aquella palavra nenhuma outra variação que a faça significar *dois homens*.

O grego antigo, porém, não só possue variação para significar que se trata de um homem ou de muitos homens, como ainda tem outra variação para traduzir *dois homens*.

Em resumo, além do singular e do plural, esta lingua tem tambem o *dual*; de sorte que «*dois*» tem tantas representações quantos os termos variaveis da lingua.

Affirma-se mesmo que certas linguas antigas tinham tambem o *trial*; mas em geral, *tres* e *muitos* se confundiam.

Em todo o caso, a existencia do *trial* bem como sua confusão com o *plural*, está de accordo com o facto de ser *tres* o limite da contagem abstracta e espontanea, conforme o demonstra a observação dos animaes, confirmada pela nossa especie.

Esta ignorou, mesmo durante muitos seculos, o numero abstracto conforme hoje concebemos.

Não é, porém, occasião opportuna de insistirmos neste ponto, pois devemos continuar no exame da constituição da linguagem commum sob o aspecto numerico.

O facto de não ter subsistido o *dual* e o *trial* nas linguas modernas, não demonstra que estas sejam menos dominadas pelas considerações numericas.

Si as fórmas apparentes de variação ficaram reduzidas ao singular e ao plural, isso teve lugar porque no periodo

de formação das linguas modernas, já estando constituida a *escala numerica*, era possivel exprimir de um modo facil todos os gráos imaginaveis da pluralidade, estendendo aos casos em que dantes se empregava o *dual* e o *trial*, o uso da mesma escala, que nas linguas antigas só era indispensavel a partir de quatro.

20.— Vamos mesmo reconhecer, descendo a um exame mais minucioso das linguas, quaes os elementos que serviram para a construcção de uma tal escala e que prepararam, portanto, o surto especial das concepções numericas.

Com effeito, em todas as linguas encontramos varios termos para designar as idéas de *um* e de *dois*, de um modo concreto antes de se tornarem abstractos.

Na escala numerica *um* nos dá ideia de um objecto qualquer que elle seja, e *dois* traduz a concepção de dois objectos tambem quaesquer, sem nada nos dizer sobre o seu modo de ligação.

A lingua tem entretanto uma serie de palavras mais ou menos concretas que preparam o advento destas palavras abstractas.

Temos, por exemplo, a palavra *casamento* que indica a formação de um grupo de dois individuos de sexos differentes; temos a palavra *gemeos* que indica o grupo de *dois* seres que nasceram juntos; temos a palavra *ambos*, mais abstracta que as precedentes, porque indica o grupo de *dois* seres *quaesquer*; e assim muitas outras.

21.— E, além disso, si considerarmos os numeros, não mais para representar as pluralidades, porém para designar os gráos de intensidade de um phenomeno apreciavel, tal como a extensão e o movimento, seremos então levados a reconhecer em muitas palavras uma serie de variações que prepararam esta representação.

Não só muitos *adjectivos* e *adverbios*, como tambem diversos *substantivos*, nos manifestam em todas as linguas

uma serie de comparações geraes que preparam as comparações especiaes e mais precisas, representadas pela escala numerica.

E' o que se descobre, por exemplo, no confronto entre *grande* e *pequeno*, *pouco* e *muito*, *grande*, *maior* e *maximo*, *pequeno*, *menor* e *minimo*, *superior*, *médio*, *inferior* e *minimo*, etc. O mesmo se nota nas *locuções comparativas* dos adjectivos e adverbios e nas *locuções augmentativas* e *diminuitivas* dos adjectivos e substantivos.

Para este ultimo citamos, para exemplo, as palavras: *sala*, *salinha* e *salão*, que exprimem respectivamente um gráo normal, um gráo pequeno e um gráo inferior da extensão de uma sala.

22.— Lançando as vistas sobre as considerações precedentes, percebe-se claramente que a instituição systematica da serie numerica, constitue apenas uma especificação de pensamentos humanos, já sufficientemente elaborados.

Até então, mais ou menos confundidas com as demais concepções concretas, as concepções numericas destacam-se pouco a pouco e tornam-se afinal objecto de meditação humana, iniciando assim o surto decisivo da razão theorica.

Vê-se, ao mesmo tempo, que a cultura arithmetica torna-se apenas o prolongamento da educação respectiva que o mais humilde cidadão recebe na sociedade em que vive; porque, de facto, essa cultura não faz mais do que desenvolver systematicamente as concepções fornecidas pela linguagem vulgar.

§ ε' (5)

Advento e propriedades subjectivas dos primeiros numeros

23.— As considerações feitas no paragrapho precedente, sobre o predominio das concepções numericas na linguagem

(5) Lettra éta, que accentuada exprime o numero 5 (pente).

humana, nos mostram, ao mesmo tempo que um tal predominio resulta de nossa propria constituição sociavel.

E' o que se deprehende da distincção abstracta entre a singularidade e a collectividade, que as variações das palavras traduzem em todas as linguas.

Si o homem não fosse um ser naturalmente sociavel, não poderia elevar-se á noção de collectividade, inteiramente ligada á de sociabilidade.

Para nos convencermos da verdade desta observação basta notar que nossas *ideias* têm sempre um caracter *concreto*, antes de se tornarem *abstractas*.

A noção de pluralidade é hoje abstracta, pois que indica um agrupamento, sem mesmo suppor que os elementos agrupados acham-se ligados por qualquer fórma.

Mas, a ideia primitiva de pluralidade resultou da contemplação de entes distinctos, porém ligados.

Ora, esta noção é irreductivel a qualquer outra; nós a adquirimos porque temos consciencia de nossa ligação para com os outros entes, e esta consciencia suppõe em nós a sociabilidade, isto é, o conjuncto dos attributos inherentes á nossa natureza affectiva. (5a).

Uma especie que não possue taes attributos, não póde evidentemente conceber a noção de *collectividade* ou de grupo; tudo para ella é desconnexo, só existindo individuos.

Isso posto, si as concepções numericas estão ligadas á nossa propria natureza, conforme o demonstra a organisação da linguagem, não póde restar duvida sobre a origem subjectiva de taes noções.

24. — Mas, essa filiação torna-se mais saliente desde que se examine o modo especial do advento dos numeros e a descoberta de suas propriedades iniciaes.

(5a) Apêgo, veneração e bondade.

Porém, para que fiquemos habilitados a fazer esse exame, cumpre em primeiro lugar distinguir entre a acquisição das noções e o estabelecimento dos signaes empregados para exprimil-as; em uma palavra, entre a *concepção* e a *expressão*, tendo em vista que as concepções podem existir sem que o individuo possua meios de communicar-se com o exterior.

Em segundo lugar, convém observar que a difficuldade de distinguir immediatamente as pluralidades além de *tres*, é apenas abstracta; porque, nos casos concretos, o conhecimento dos entes que compõem o grupo permitte conservar a noção de grupos assás consideraveis. E' assim que vemos as aves presidirem a creação de um grande numero de filhos, percebendo quando lhes falta uns ou lhes ajuntam outros.

Feitas estas considerações, notemos agora que a noção que o mundo nos offerece a principio, não é certamente a que depois obtemos e traduzimos pela palavra *ordem*.

A noção directa que o espectaculo exterior nos offerece espontaneamente é, ao contrario, a de pluralidade sem distincção de gráos, o cahos, em uma palavra.

E' isso o que sente a criança que vê a luz do dia.

Abafada pela multidão e incoherencia das impressões que recebe, immersa neste cahos, ella procura naturalmente sahir delle.

São os attributos affectivos que herda dos seus antepassados e as condições sentimentaes indispensaveis á sua vida, que reagem espontaneamente sobre sua intelligencia e a levam a lançar as primeiras bases da concepção a que chamamos *ordem*, substituindo ao cahos objectivo o arranjo subjectivo.

Este arranjo começa pela fixação dos seres e grupos de seres que nos affectam mais de perto, segundo as relações que sentimos existir entre elles e nós, de modo a

constatar com clareza e certeza a sua presença ou a sua ausencia.

Ora, o reconhecimento de seres isolados póde ser feito por mera intuição, por qualquer das impressões que recebemos.

Quanto aos grupos, porém, a simples inspecção já não basta para dicidir se contemplamos ou não o mesmo conjuncto, por pouco que seus elementos avultem, ou não nos sejam assás familiares.

Com effeito, o conjuncto póde mudar sem que possamos verifical-o immediatamente, ou porque saiam alguns elementos e entrem novos; ou porque varie a disposição mutua dos elementos constitutivos do grupo, ou mesmo pelo concurso dessas duas circumstancias. De sorte que o problema de saber si temos deante de nós o mesmo grupo, tomando unicamente em consideração a coexistencia dos elementos respectivos, decompõe-se nessas duas ordens de questões irreductiveis:

1ª. Reconhecer si houve variação no grupo pela addicção ou subtracção de algum elemento.

2ª. Verificar si houve alteração pela mudança na posição dos elementos.

A solução da primeira questão conduziu á instituição da *numeração*; e a da segunda, fórma o objecto da *Theoria numerica da ordem* (Theoria das permutações, arranjos, combinações e repartições).

Apezar da connexidade de ambas, a segunda questão é mais complexa do que a primeira e repousa inteiramente sobre ella.

Não foi desta segunda questão que surgiram as concepções numericas, mas simplesmente da primeira, (isto é, da fixação dos seres e grupos de seres), unica de que nos devemos occupar actualmente.

Ora, para distinguir com precisão os grupos maiores ou menores, basta suppor os seres arrumados de modo que

possamos formar uma escala, na qual, cada grupo differindo do anterior e do seguinte por um unico objecto, essa differença possa ser apprehendida com facilidade.

Nestas condições, podemos com effeito reconhecer immediatamente si trata-se de um certo grupo ou de grupo diverso; porque a comparação na escala reduz-se a vêr si existe aquelle grupo de objectos, sabendo que todos os outros fazem parte della.

25. — Ideia abstracta de numero. — A ideia abstracta destes grupos, isto é, a noção delles desprendendo-se da natureza dos elementos componentes para sómente considerar-se o facto da coexistencia, eis o que constitue o *numero.*

Até aqui suppuzemos os grupos como formados por elementos que coexistissem fóra de nós ou objectivamente.

Mas, póde acontecer que o grupo seja constituido apenas pela reunião em nosso cerebro de imagens correspondentes a seres ou phenomenos que se succedem.

Neste caso, o grupo é puramente subjectivo.

Quando por exemplo, dizemos *cinco homens*, nos referimos a um grupo que tem existencia objectiva; quando porém nos referimos a *cinco gerações*, concebemos um grupo que não existe fóra de nós, mas sim em nós mesmo, pela coexistencia de imagens em nosso cerebro.

Seja como fôr, o numero é a *concepção de um grupo objectivo ou subjectivo*, *abstrahindo da natureza dos elementos que o compõem.*

Quando dizemos, por exemplo, *cinco homens, cinco gerações, cinco minutos*, embora a noção concreta seja diversa, a noção abstracta é a mesma; porque se trata sempre de um certo grupo de objectos que coexistem, ou objectivamente, que é o caso da coexistencia propriamente dita (cinco homens); ou subjectivamente, que é o caso da successão (cinco gerações, cinco minutos). De modo que podemos, em outras

palavras, dizer que o *numero indica os diversos grâos de coexistencia ou successão.*

26. — Sendo assim, vamos mostrar como o espirito humano foi levado á similhante concepção.

Para descobril-o, comecemos por observar que durante um periodo immemorial da infancia de nossa especie, não se contava além de *tres*. Referimo-nos á contagem abstracta, conforme acima observamos ; isto é, á concepção dos grupos independentes do conhecimento dos seres que o compõe.

Quatro surgiu tardiamente, e surgiu, ou por meio de *dois*, conforme o attesta a definição popular — *dois e dois são quatro*, ou por meio de cinco e de um, conforme o indica a notação romana IV, que significa *cinco menos um*.

Cinco, sendo o numero de dedos da mão e do pé, deve ter sido um dos grupos primeiramente notados, conforme ainda o attesta seu emprego na numeração concreta. Por exemplo, o caderno consta de *cinco* folhas, e a *mão* de papel consta de cinco cadernos.

Note-se que o signal romano V parece ser uma simplificação do desenho de uma mão aberta com o polegar afastado.

Segundo essa origem, o advento de quatro, como cinco menos um, constitue a primeira manifestação theorica da *subtracção* e confirma «que todo intermediario está subordinado aos extremos, cuja ligação opéra» (15ª lei de Philosophia Primeira), por isso que quatro surgiu depois de *tres* e de *cinco*.

Isto nos mostra tambem que, antes de formar a escala numerica, a Humanidade foi levada a fixar os grupos desconnexos segundo o interesse que elles despertavam.

Já vimos a fixação de *cinco* : *Dois cinco* ou *dez* devia ter sido inspirado pela contemplação das duas mãos; estas com os pés suggeriram provavelmente *quatro cinco* ou *vinte*, o que foi o germen da contagem por quatro, como

se vê ainda hoje no francez, *quatro vinte* ou *oitenta*. (5b).

Assim surgiu tambem *dois tres* ou *tres dois*, isto é, *seis*.

E' portanto, incontestavel que todas as nossas noções numericas resultaram das abstracções caracterizadas pelos vocabulos *um, dois e tres*.

Ora, Jeorge Leroy, nas suas *Cartas sobre os Animaes*, demonstra que estes, a partir das aves pelo menos, chegam a instituir essa arithmetica rudimentar. (5c).

O inicio de toda a evolução abstracta, sendo assim commum ás especies superiores, o sentimento habitual dessa conformidade deve desenvolver a nossa confraternisação para com ellas.

Em resumo, o que precede mostra como o conjuncto da philosophia arithmetica consiste em reconhecer o modo do advento e o surto primordial dos tres primeiros numeros, que constituem o ponto de partida espontaneo de todas as concepções numericas.

30. — A explicação do advento destes tres numeros é aliás simples.

(5b) «Para exprimir dez, Figueira dá *opacombó*, todas as mãos, ao passo que Montaya dá *ace-pó mõcõim*, duas mãos de gente, designando *cinco* por *ace-pó petein*, uma das mãos de gente; *vinte*, elle expressa por *ace-pó ace-pi abé*, mãos de gente pés de gente tambem, e por *mbo mbi obé*, mãos e pés.» (*Annaes da Bibliotheca Nacional do Rio de Janeiro*, Vol. VI. Fac. n. 1, pag. 7, 1878-1879). Dr. Baptista Caetano. — *Esboço grammatical da lingua guarany*.

(5c) Jorge Leroy, em suas *Cartas sobre os Animaes*, conta que alguns caçadores resolveram matar uma pega: Para isto *um* delles escondeu-se em logar proximo ao ninho a espera do passaro que, observando a cilada, só se recolheu depois que o caçador se retirou do esconderijo. Na manhã do dia immediato esconderam-se *dois*, a pega que isto observava, só voltou depois de vel-os sahir um após outro. Na manhã seguinte esconderam-se *tres* e a mesma cousa aconteceu: a pega recolheu-se depois de sahirem os tres successivamente. Emfim foi preciso que na outra manhã se occultassem cinco ou seis para desnortear o passaro, que depois de ver sahir successivamente o 1º o 2º e o 3º, recolheu-se e foi morto por um dos caçadores occultos. A este proposito diz elle: «Entre as differentes idéas que a necessidade faz adquirir aos animaes, não se deve esquecer a do *numero*. Os animaes contam, isto é certo . ... » (7ª carta).

Podemos dizer que a noção de *um* é obtida destacando um ser do conjuncto dos outros que com elle se encontram em condições analogas.

Sabemos que ha especies de animaes que podem manter-se após o nascimento independentemente de qualquer auxilio, mas que ha outros em que isso não se dá sinão depois de muito tempo. Estas são as especies superiores, desde as aves até o homem, e é ahi que vamos encontrar o germen das primeiras concepções numericas.

Em taes especies o animal é levado pelo instincto nutritivo a destacar de tudo quanto o cerca, áquelle ente do qual depende a sua alimentação.

De sórte que é a principio o instincto nutritivo que leva a criança a destacar o typo materno, pelo conjuncto das impressões que se ligam ao mesmo instincto, isto é, pelo tacto, pelo cheiro, pelo som, etc.

Nestas condições, quando tudo para a criança ainda è um cahos, a mãe surge, no meio de similhante situação, como um verdadeiro facho que deve illuminar sua existencia

O typo materno torna-se desde logo, não só o manancial de todas as suas satisfações, a fonte de todas as suas emoções amorosas, mas ainda o objecto de todos os seus pensamentos.

Levada pelo sentimento, adquire de facto, uma primeira noção, a noção de *um* ou antes de *primeiro* que não é outra sinão aquella que traduzimos pela palavra *unidade*, ou pela palavra *synthese*, porque na verdade tudo para a criança se resume a principio no typo materno.

Apenas essa noção tem um caracter absoluto, em consequencia da situação em que a mãe encontra-se em relação a ella.

Torna-se, porém, relativa, com a noção de *dois* que surge naturalmente com a consideração do typo paterno que a criança destaca em breve.

Em nossa especie, como em todas as especies superiores, o typo paterno, tornando-se annexo ao materno pelo auxilio que lhe presta na creação da prole, dá logar a esta outra noção, que de facto não é sinão aquella que traduzimos pela palavra *auxiliar* ou *segundo*.

E note-se ainda, que esta noção, relativando aquella, encerra implicitamente a idéa de *ordem*, ou de *arranjo*, em consequencia da combinação da fixidez do grupo que a suggeriu; de sorte que a noção de *um* encerra a de *synthese* ou de *amor*, e a de *dois* traduz a de combinação ou a de *ordem*. Assim consegue-se obter as noções de *um* e *dois*, que aliás nunca são completamente abstractas na linguagem vulgar, porquanto, sempre variam com o sexo dos elementos. E' assim, que dizemos *um*, *dois* e *uma* e *duas*, o que não tem logar para os outros numeros.

E' facil comprehender agora o modo porque a criança chega á noção de tres. Distinguindo já o typo materno, do typo paterno, é naturalmente levada a fazer uma distincção entre estes e ella propria; porque afinal, comprehende que existe, que é um ser distincto daquelles dois, e a elles inteiramente ligada. (5d).

Assim é obtida a noção de *tres* ou de terceiro, que encerra implicitamente a de successão ou progresso.

31. — Da noção de tres em deante, o surto das concepções numericas, depende do desenvolvimento collectivo.

A noção de quatro, por exemplo, é muito tardia. Podemos ter a prova disto, observando que na lingua de muitas de nossas tribus selvagens, a palavra *quatro* é synonima da palavra *muito*.

E' que, a partir de quatro, as considerações subjectivas começam a misturar-se com o ponto de vista objectivo nas

(5d) Para sentir a verdade desta observação, basta notar que a criança quando começa a fallar, emprega o verbo na terceira pessoa, que encerra como vimos, a noção de tres. Ella não diz, *eu fiz isto*, *mas F. fez isto.*

apreciações numericas, por causa do ascendente que sobre o individuo vae adquirindo cada vez mais a ordem exterior.

A partir de tres, as applicações objectivas confundem-se, com effeito, com os motivos subjectivos, que entretanto continuam sempre a fornecer a fonte das inspirações essenciaes.

Ordinariamente se pensa e ensina que os numeros *quatro, cinco, seis, sete*, etc., resultaram da juncção de uma nova unidade á pluralidade anterior. Mas, similhante conjectura é manifestamente inexacta.

Os menores numeros consecutivos a tres foram obtidos, no começo por intuição immediata de certos grupos, como vimos acima, a respeito de *cinco*, *dez* e *vinte*; ou formados pela combinação dos anteriores, *um, dois, tres,* entre si e comsigo mesmo, conforme os typos *dois—dois* e *tres—dois*.

Similhante processo foi inspirado pelo espectaculo social; que foi chamando a attenção para grupos maiores, concretamente definidos. Assim *quatro* caracterisa o grupo formado por dois casaes sem filhos.

Esta origem subjectiva de quatro está conforme com a sua definição mais popular: *dois* e *dois são quatro*.

Este numero tem grande importancia: 1° por haver estabelecido a continuidade da escala até *cinco*, ligando este numero a *tres*, o que está de accórdo com a 15ª lei de Philosophia Primeira; 2° por constituir a primeira manifestação do espirito algebrico. Porque, comparando os dois enunciados *dois* e *dois são quatro* e *tres e um são quatro*, chega-se á relação de igualdade *dois* e *dois* são *tres* e *um*; onde confrontando as parcellas do primeiro membro com as do segundo, vê-se que uma destas (tres igual a dois menos um) tem uma unidade de mais, e a outra (um ou dois menos um) tem uma unidade de menos do que aquella.

E' este o primeiro exemplo da persistencia da somma de duas parcellas quando uma cresce da mesma quantidade de que a outra simultaneamente diminue. (5e). 3° por dar uma idéa das mais simples combinações numericas: da addição em dois mais dois; da subtracção em cinco menos um; e da multiplicação e potenciação em duas vezes dois.

A existencia de um chefe commum a duas familias sem filhos ou o advento de um filho a uma dellas, determinou a concepção de *cinco*, expressão de duas *combinações* seguidas ou reunidas por uma *synthese*, bem como da união de uma *combinação* com uma progressão. *Seis*, resultou do ajuntamento de duas familias de tres membros (duas progressões); ou tres familias sem filhos (uma progressão de combinações); ou finalmente a reunião de uma familia com filhos á outra que os não tivesse, sob um chefe commum (reunião de uma progressão com uma combinação seguida de uma synthese). Este numero teve grande importancia por ser formado pela somma dos numeros iniciaes, um, dois e tres. Teve logo uma constatação objectiva por representar então o numero de planetas conhecidos; similhantemente ao que se dera com os numeros anteriores, que foram fixados objectivamente na representação do Céo, do Sol e da Lua, ou das quatro phases desta e etc.

Attinge-se desta arte a *sete*, que é o maior numero que se póde commodamente formar, combinando só os tres pri-

---

(5e) Por esta igualdade vê-se que, partindo da definição arithemetica de quatro (tres mais um), chega-se a sua definição popular: *dois mais dois são quatro*.

Diz Pierre Laffitte que A. Comte chamava esta proposição de *theorema de Don Juan*. Elle explica ainda o motivo desta denominação, citando o seguinte trecho de Molière: Sgnarelle.—Mais encore faut il croise quelque chose dans le monde.

Qu'est ce donc que vous croyes? Don Juan.

Je crois que *deux e deux sont quatre*, Sganarelle, et que quatre e quatre sont huit......

meiros; reunião de duas familias com filhos sob um chefe (*um* mais *tres*, mais *tres*, *tres* mais *tres* mais *um*, *tres* mais *um* mais *tres*); ou ajuntamento de tres familias das quaes só uma com filhos (*tres* mais *dois* mais *dois*, *dois* mais *dois* mais *dois* mais *tres*, *dois* mais *tres* mais *dois*).

Da comparação desses grupos assim precisados, surgiram as duas distincções dos numeros em *impares* e *pares*, e depois em *primos* e não *primos*.

Os numeros impares devem o seu assignalamento ao facto de representarem a *decisão*, de dissiparem as duvidas, e impedirem a irresolução, porque nos grupos que elles caracterisam não póde haver empate. (Constituição dos tribunaes).

Elles são tidos entre os chinezes por *celestes* e os pares por *terrestres*.

A differença entre os numeros primos e não primos, resulta da sua comparação com os tres iniciaes, *um*, *dois*, *tres*, os quaes não podem decompôr-se igualmente senão em unidades.

Cinco revelou uma aptidão até certo ponto equivalente, por assignalar um grupo que não póde ser decomposto em grupos iguaes; é preciso resolvel-os em unidades. Mediante tal distincção, é intuitivo que as propriedades dos numeros podem ser deduzidas dos attributos inherentes aos que são *primos* ou *primitivos*, considerados como raizes dos que o não forem.

Até A. Comte, essa concepção dos numeros primos tinha um caracter absoluto que elle fez desapparecer, instituindo a mesma distincção quanto ao lugar que compete aos numeros primos na respectiva escala. Um, dois, tres, cinco, sete, onze, treze, dezesete, dezenove, vinte e tres...

Chamou de *simplesmente primos* os que compõem a serie natural dos numeros primos; *duplamente primos*, os que compõem a série obtida considerando unicamente os que

occupam logares primos naquella; *triplicimente primos*, os que estão no mesmo caso em relação á segunda série; e assim por deante. (5f). Vê-se por ahi, que as séries primas de diversas ordens começam sempre pelos numeros *um, dois, tres*.

Sete é o primeiro numero duplamente primo depois destes; e *treze*, o primeiro *triplicimente primo* depois delles. Um, dois, tres, sete, treze, vinte e nove, trinta e sete, cincoenta e tres, sessenta e um, setenta e nove, cento e sete... (duplamente primos).

Um, dois, tres, treze, trinta e sete, cento e sete... (triplicimente primos). Além desta distincção em *pares, impares* e *primos*, póde-se ver nas propriedades subjectivas dos numeros iniciaes o advento das operações arithmeticas, a saber: da addicção em 2 e 2, 2 e 3, 3 e 3; da subtracção em 5 menos 1; da multiplicação em 2 mais 2 mais 2 ou 3 vezes 2 e 3 mais 3 ou 2 vezes 3. A divisão só surgiu muito mais tarde no periodo theocratico e a potenciação só deu logar a uma operação distincta da multiplicação, com o surto algebrico peculiar aos tempos modernos.

32.— **Emfim** as propriedades subjectivas dos tres primeiros numeros, que são o ponto de partida de toda a evolução theorica, levaram A. Comte a denominal-os — *sagrados*.

Elles não carecem de signaes para sua fixação, por isso que, sendo inspirados pelo sentimento, ligam-se as imagens mais intensas que possuimos.

Mas, os signaes vêm ligar-se a essa dupla representação (sentimentos e imagens), desde que a situação social solicita o surto das concepções numericas.

(5f) **T. Mendes.**— As Ultimas Concepções de A. Comte.

§ ϛ' (6)

Transformação objectiva das concepções numericas

33.— Vimos que as concepções numericas surgiram subjectivamente; todavia ellas foram se objectivando, á proporção que a Humanidade sentia a necessidade de conhecer e de agir sobre a ordem exterior.

Mas, para comprehender como similhante transformação se operou definitivamente, convém recordar o emprego que actualmente têm os numeros, depois de realisada toda a expansão de que eram susceptiveis.

Teremos assim a confirmação da lei citada no paragrapho precedente. (6a).

Os numeros são empregados actualmente para os fins seguintes:

Classificar, *contar*, *calcular* e *medir*.

Desses quatro fins o primeiro se distingue dos outros por ser o mais subjectivo.

34.— EMPREGO DOS NUMEROS PARA CLASSIFICAR.— A linguagem vulgar conservando a distincção entre os numeros *ordinaes* e os *cardinaes*, guarda a lembrança da origem subjectiva dos numeros

Com effeito, o modo mesmo pelo qual surgem as concepções numericas, mostra que os numeros servem para marcar a jerarchia antes de indicar a *quantidade*.

Mãe, Pae e Filho, eis a jerarchia inicial.

Ha uma experiencia facil para se conhecer esse caracter das concepções numericas iniciaes.

---

(6) Lettra *esti*, que desappareceu do alphabeto e que assim accentuada exprime o numero 6 (heks).

(6a) Lei da Philosophia Primeira (15a).

As crianças não ligam aos nomes dos numeros, a principio, a idéa de grupo e sim a idéa de cada um dos objectos considerados numa certa ordem.

Por exemplo, apresentem-se dois objectos a uma criança, de dois a tres annos ou pouco mais, e contem-se *um* e *dois*: si se pedem *dois*, ella não nos dá ambos, mas sim o segundo recebido.

Só mais tarde ella percebe que *um* é qualquer dos *dois*, e que *dois* designa o grupo de ambos.

Aliás o nome dos dois numeros iniciaes mostra que a numeração ordinal é distincta da cardinal na sua origem, como o indicam as palavras *primeiro* e *segundo*.

Ahi se vê que foi a contemplação da Humanidade que induziu a fixar a attenção sobre o lugar que os entes occupam.

Mas os numeros podem ser empregados para classificar objectos quaesquer; de sorte que por ahi fez-se a transição do emprego subjectivo para o uso objectivo.

35.— NUMEROS EMPREGADOS PARA CONTAR.— Toda classificação equivale a formar uma *pluralidade*, ou *grupo* e desde então era facil comprehender que o nome do ultimo dos objectos classificados servisse para designar o grupo.

Com effeito, uma pluralidade fica caracterisada quando se sabe qual o ultimo posto a que ella dá lugar, suppondo-se os seus elementos dispostos em uma série.

A' vista desta observação, foi natural que se abstrahisse da noção de *ordem* para só considerar o gráo da existencia collectiva.

Eis ahi como os numeros se transformaram de ordinaes em cardinaes.

Note-se, que a noção de ordinalidade é essencialmente subjectiva. A distincção entre ordinal e cardinal póde, pois, representar em arithmetica a differença geral entre o subjectivo e o objectivo.

Essa transformação foi inspirada por uma nova maneira de apreciar a jerarchia, que se apresentou quando se teve de classificar as familias ou as tribus pelos seus chefes, classificando estes pela quantidade de seus commandados.

Foi assim que a classificação conduziu á contagem.

Contar é distinguir um numero do que o precede e do que o segue.

Essa distincção se opera considerando o numero como marcando o ultimo ponto a que se chegaria si dispozessemos os elementos do grupo em série linear.

Quem conta faz implicitamente uma classificação.

A escala numerica permitte systematisar essa transformação da pluralidade em ordinalidade.

Mas, para isso não precisa que ella seja de antemão indefinida; porquanto, á medida que novos grupos fôrem surgindo, não designados ainda, póde-se ir creando signaes para represental-os, visto como na contagem um numero não apparece senão depois do que o precede immediatamente.

36.— EMPREGO DOS NUMEROS PARA CALCULAR OU AVALIAR.— Calcular arithmeticamente ou avaliar é achar o resultado de uma combinação dada de varios numeros conhecidos.

Pela contagem determina-se o lugar que um grupo definido por qualquer fórma occupa na escala numerica, *percorrendo, um após outro, todos os termos desta escala*.

Pelas avaliações propriamente ditas, trata-se de determinar esse lugar sem passar por todos os gráos que o precedem.

Proponhamos, por ex., saber: sessenta e cinco homens com mais doze quantos são. E' facil de ver que a questão póde ser resolvida contando ou calculando.

Para resolvel-a contando, teriamos que percorrer, a partir de sessenta e cinco, doze gráos ascendentes da escala numerica; diriamos *sessenta e cinco, sessenta e seis*, etc., até setenta e sete.

Para resolvel-a calculando, teriamos que achar o grupo da escala que resulta da addicção daquelles dois grupos, isto é, de *sessenta e cinco* com *doze*, sem termos necessidade de considerar os grupos intermediarios.

Si quizessemos ainda saber qual o numero de pedras que restariam quando de um grupo de *setenta e sete* retirassemos doze, a questão podia tambem ser resolvida de dois modos.

Para resolvel-a contando, percorreriamos, a partir de *setenta e sete,* doze gráos de escala, mas em *ordem descendente,* por isso que o grupo resultante deve evidentemente ser menor que setenta e sete.

Para resolvel-a calculando, a questão se reduziria a ver qual o grupo da escala que resultaria da *subtracção de doze de setenta e sete*.

No primeiro exemplo vê-se que o calculo ou avaliação exige que se combinem os dois grupos por *addição* ; no segundo exemplo, que se combinem os dois grupos por *subtracção*. Em geral, as *avaliações* suppõem diversas combinações, cujas principaes são estas que chamâmos *addição* e *subtracção* ; donde se derivam respectivamente a *multiplicação* e a *divisão*.

A Humanidade teve que as inventar, assim como teve necessidade de instituir processos para avaliar seus resultados.

Adiante indicaremos estes processos ou *operações arithmeticas*.

Tendo-se apanhado a differença entre *contar* e *calcular* ou *avaliar*, immediatamente comprehende-se que o calculo exige a construcção prévia da escala numerica, o que não é indispensavel para a *contagem*. Finalmente vê-se que o calculo reduz-se á classificação mediante a contagem, que aliás é muito facilitada pelo uso da mesma escala, comquanto não exija sua construcção prévia.

40. — Relativamente ao emprego dos numeros para *medir*, de que nos vamos occupar, é indispensavel uma explicação prévia.

Com effeito, para comprehender esta applicação extrema dos numeros, precisamos préviamente apreciar a distincção entre as grandezas *continuas* e as *descontinuas*.

Chamam-se grandezas continuas aquellas que se nos apresentam como um todo sem partes distinctas; como, por exemplo, uma linha, uma superficie, etc. As grandezas descontinuas são, ao contrario, aquellas que podem ser olhadas como sendo constituidas por partes determinadas. Exemplo: um rebanho, uma floresta, etc.

«Como tudo o mais, convém observar que similhante distincção não é absoluta.

Si considerarmos, por ex., um rebanho no ponto de vista de um conjuncto de animaes, teremos uma grandeza descontinua, porque ella se nos apresenta como formada por um numero maior ou menor de animaes; mas, si considerarmos essa pluralidade sob o ponto de vista do peso, como material de alimentação, teremos ahi uma grandeza continua.

Do mesmo modo, um certo grupo de homens, considerado quanto ao seu conjuncto, forma uma grandeza descontinua, porque temos ahi uma pluralidade, cujos elementos são perfeitamente definidos; mas, si por outro lado, olharmos um grupo de homens sob o ponto de vista do volume que occupam, teremos ahi uma grandeza continua, porque podem ter dimensões muito variaveis, sendo uns mais gordos, outros mais magros, estes mais altos, aquelles mais baixos, etc. Isto nos mostra que uma grandeza descontinua póde ser muitas vezes tida como continua.»

41.— Afim de completar estas considerações, vejamos o que significa medir uma grandeza.

A medida, conforme o indica sua accepção etymologica, consiste em referir o conhecimento de uma grandeza ao de outra da mesma especie ou de especie differente.

A medida póde ser directa ou indirecta.

A medida é directa quando se trata de simples comparação immediata entre grandezas da mesma especie.

Neste caso as grandezas comparadas podem ser iguaes ou desiguaes.

Si são iguaes a *medida* reduz-se immediatamente a uma simples *contagem*.

Uma qualquer das grandezas, tomada abstractamente para termo de comparação de todas as outras, recebe então o nome de *unidade*. Quando as grandezas comparadas são desiguaes, é sempre possivel suppôl-as constituidas por partes iguaes, e a questão reduz-se, portanto, ao caso precedente.

Uma destas partes tem então o nome de *modulo* ou de unidade modular.

Tratando-se, por exemplo, de referir ao *metro* o comprimento de uma estrada, suppomos a principio que esse comprimento é constituido por partes iguaes ao metro e a questão resolve-se desde logo na precedente, porquanto tudo reduz-se a contar o numero de metros que ahi se contém.

O metro será o *modulo* ou a medida modular. E, como é esta a marcha que sempre se segue na medida directa, podemos dizer que:

« A medida directa consiste em assimilar uma grandeza que não é pluralidade a outra que o é, afim de contar em seguida as pluralidades obtidas. »

Assim, pois, a medida reduz-se á contagem, e portanto, á classificação.

Ao mesmo tempo vê-se que esta operação a que chamamos *medida*, suppõe uma dupla condição.

1ª. A primeira condição é que a grandeza a medir seja assimilada a uma grandeza descontinua ou pluralidade.

Esta primeira condição mostra o ascendente do subjectivismo ou da abstracção; similhante assimilação é, com effeito, subjectiva e abstracta, porquanto ninguem se lembra na realidade de partir a grandeza continua a medir.

Ao mesmo tempo esta primeira condição póde ser considerada como o inicio mathematico do *methodo infinitesimal*, segundo o qual a consideração das grandezas é substituida pela consideração dos seus elementos subjectivamente instituidos.

2ª. A segunda condição é que todos os elementos da pluralidade sejam iguaes entre si.

Graças a esta condição secundada pela precedente, é que a classificação conduziu á medida, directa a principio e depois indirecta.

A medida indirecta póde, com effeito, ser definida como tendo por objecto reduzir o conhecimento de uma ou mais grandezas ao conhecimento de outras, por meio das relações existentes entre ellas.

A medida indirecta póde-se applicar, quer a grandezas da mesma especie, quer a grandezas de especies differentes.

Quando, por exemplo, medimos uma distancia pelos dias de jornada, temos o caso de uma medida indirecta entre grandezas de especies differentes.

Quando medimos o lado de uma figura por meio de dous outros, temos uma medida indirecta entre grandezas da mesma especie.

Mas, a instituição das medidas indirectas em cada caso não pertence á mathematica, salvo quando se trata de phenomenos geometricos ou mecanicos.

Depois desta applicação extrema á medida das grandezas, a noção de numero generalisou-se, passando a ser considerado como o *resultado da medida das grandezas continuas*.

Os calculos foram systematicamente instituidos nessa supposição, deixando as modificações exigidas em cada caso

particular para quando se tivesse de fazer a passagem do abstracto para o concreto.

42. — Emfim, com a transformação das concepções numericas de subjectivas em objectivas, a Humanidade assegurou o pleno desenvolvimento d'ellas e o surto do genio abstracto.

Applicando os numeros ao mundo exterior, a principio aos astros que foram objecto de adoração especial, e depois aos grupos que mais de perto lhe interessavam, é obvio que essa serie de representações concretas, familiares e continuas, devia tornar finalmente abstractas as concepções numericas.

Tornadas abstractas, ellas foram se generalisando e systematisando á medida que as necessidades sociaes o exigiam.

Foi o surto das concepções numericas que permittiu instituir as leis da extensão e do movimento, e dahi subir ao conhecimento dos astros. Produzido esse impulso, o espirito humano tentou achar leis numericas por toda a parte, e procurando esse impossivel conseguiu a sciencia.

Este surto objectivo realisando-se, porém, empiricamente, expoz a evolução theorica a desvios que devem ser corrigidos na evolução individual. Por isso cumpre antes de tudo lembrar, desde o inicio dos estudos logicos, que essa extensão dos numeros á apreciação do Mundo é uma instituição da Humanidade.

De sorte que, em vez de receber *o numero* da contemplação do Mundo, o numero foi apenas o primeiro instrumento abstracto que a Humanidade applicou ao estudo da ordem exterior.

Todo o surto objectivo resultou, portanto, de uma instituição subjectiva.

. . . .

. . . .

Emfim, o surto inicial das concepções numericas já patenteia a verdadeira dignidade do calculo arithmetico.

Mas, o immenso desenvolvimento a que elle conduziu o genio da Humanidade, ainda veio tornar mais saliente o papel que cabe a similhante calculo no conjuncto da existencia humana. Com effeito, ao passo que as concepções numericas provocavam a apreciação abstracta da ordem exterior, o estudo desta ia revelando a impossibilidade de toda a explicação numerica além dos phenomenos geometricos e mecanicos e, portanto, astronomicos.

A cultura theorica desprendia assim a Humanidade do ponto de vista absoluto, e fazia prevalecer por toda a parte o relativo.

A modificabilidade crescente dos phenomenos offerecia por outro lado um novo campo ás applicações subjectivas dos numeros.

Incapazes de representar a ordem objectiva, elles se tornavam symbolos logicos, que facilitavam essa representação, e, ao mesmo tempo, permittiam que a pratica adquirisse a precisão que a theoria não comportava.

Os phenomenos politicos e moraes especialmente (nos quaes o ponto de vista da especulação tende a confundir-se com o da acção), permittindo o aperfeiçoamento da ordem espontanea, tornaram-se o dominio predilecto das especulações numericas.

Ora, similhante aptidão não é partilhada por nenhum dos outros termos da jerarchia cosmologica, de sorte que a arithmetica se nos offerece como o mais digno desses termos.

Graças ás propriedades subjectivas, os numeros servem para dar á existencia humana uma regularidade, capaz de tornar os respectivos phenomenos, mais regulares ainda do que os acontecimentos astronomicos. Não é, porém, no estudo do calculo arithmetico que esta apreciação póde ser ca-

balmente elucidada, porque ella resume-se na theoria das leis numericas da existencia humana, cujo lugar é na Moral. Mas, era necessario assignalar desde já similhante ponto de vista, para que se ajuizasse da importancia das concepções numericas e da dignidade do Calculo Arithmetico.

SEGUNDA PARTE

CAPITULO III

Instituição Fundamental da Arithmetica — Theoria Geral da Numeração

§ Z (7)

Advento, objecto e destinação do surto systematico da escala arithmetica

43.— A *numeração* systematica forma o resultado extremo do surto proprio á instituição subjectiva dos numeros e a base de todo o seu desenvolvimento objectivo.

Esse desenvolvimento constitue o ponto de partida de toda a elaboração scientifica. Para bem apreciar similhante instituição, comecemos por lembrar os problemas numericos mais geraes a que dá lugar o exame da ordem universal.

No capitulo precedente vimos que esse exame começa pela fixação dos seres e grupos de seres.

Quando se trata de seres isolados, o reconhecimento da presença ou ausencia delles exige apenas uma mera intuição.

Quanto aos grupos vimos, porém, que a simples inspecção já não basta. Os grupos podem variar, ou porque se reunam novos elementos aos primeiros ou porque outros saiam ; ou porque varie a disposição mutua dos mesmos elementos ; ou pelo concurso dessas duas circumstancias.

De sorte que o problema de saber si se tem diante de

---

(7) Lettra dzetta, que assim accentuada exprime o nº 7 (héptá.)

si o mesmo grupo, tomando unicamente em consideração a coexistencia dos elementos respectivos, decompõe-se em duas ordens de questões irreductiveis :

1ª. Reconhecer si houve variação no grupo pela adjuncção ou subtracção de algum elemento.

2.ª Verificar si houve alteração pela mudança na posicção dos elementos. (Esta segunda questão é complementar da primeira quando se trata de avaliar todos os modos de coexistencia dos diversos seres. Porque os dois problemas reduzem-se então a :

1º. Fixar os grupos distinctos que se póde formar com elementos diversos.

2º. Fixar os grupos *successivamente* possiveis com um certo numero de elementos.)

A primeira questão foi resolvida pela instituição da numeração *espontanea* a principio e depois *systematica*.

A segunda questão só mais tarde se apresentou e já foi resolvida com o auxilio da solução da primeira.

Em todo o caso a solução de ambas não deve dogmaticamente ser separada. Eis porque Augusto Comte constitue a segunda parte do Calculo Arithmetico com as duas theorias:

a) *theoria da numeração* ; b) *theoria numerica da ordem*, isto é, da *disposição*.

Mas, a theoria da numeração consta de duas apreciações successivas :

1ª. E' preciso considerar os attributos geraes da numeração systematica.

2ª. E' preciso examinar entre todas as constituições systematicas da escala arithmetica, qual a mais conveniente á vista do conjuncto de nossas necessidades moraes, intellectuaes e praticas.

Por ora nos limitaremos á primeira de taes apreciações.

Para isso vamos estudar :

I. O advento, objecto e destinação do surto systematico da escala numerica ;

II. Depois, a concepção systematica de tal escala ;

III. E finalmente sua expressão normal.

44.— CONSTITUIÇÃO ACTUAL DA ESCALA ARITHMETICA.

Mas, antes de tudo convém ter presente a constituição actual da escala arithmetica.

Como todas as nossas construcções mentaes ella suppõe uma serie de concepções por um lado, e por outro lado uma serie de signaes destinados a permittir a communicação collectiva de taes concepções, servindo por seu turno para ajudar a meditação individual.

Esses signaes são ao mesmo tempo phonicos e visuaes, e servem tambem ao sentido do tacto quando, em vez de pintados, são esculpturados.

Guardam entre si certa harmonia, a qual se torna tanto maior quanto mais se desenvolvem as concepções numericas.

Feitas estas considerações, passemos agora a estudar :

a) o advento das concepções que permittiram a construcção systematica da escala numerica;

b) o objecto destas concepções;

c) a destinação especial que mais contribuiu para o desenvolvimento dellas.

45. — O ADVENTO DA NUMERAÇÃO SYSTEMATICA. — A numeração systematica consiste em conceber de antemão todos os gráos de coexistencia, isto é, todas as pluralidades.

Basta este enunciado para vêr-se immediatamente que similhante problema só podia surgir depois de um immenso desenvolvimento social. A principio a vida collectiva só conduz a notar os objectos e os phenomenos que nos interessam directamente.

As necessidades praticas, a principio militares e depois industriaes, é que vão estimulando a nossa intelligencia.

E antes de um surto assaz pronunciado da razão theorica, a Humanidade não se propõe a conhecer o que não affecta a sua vida quotidiana. Por outro lado, as meditações não se podem desenvolver sem a estabilidade social e sem o auxilio da linguagem.

De sorte que todo o progresso theorico ficou em breve dependente do estabelecimento da existencia sedentaria e do desenvolvimento da linguagem.

Antes de satisfazer esta dupla condição seria, portanto, absurdo pretender encontrar a instituição systematica da numeração.

Mas, si assim considerado, esse problema parece apenas ter dependido de nossa situação pratica e mental, não é menos verdade que para esse duplo resultado muito concorreram nossas necessidades affectivas.

Porque foi justamente o *culto dos mortos* (7a), o habito de confiar os mortos ao seio da Terra na impossibilidade de os carregar, que determinou a existencia sedentaria.

E a existencia sedentaria, desenvolvendo ao mesmo tempo todas as affeições humanas, levou o individuo a se preoccupar com a vida collectiva, o que exigiu o desenvolvimento da actividade pratica, bem como o da intelligencia.

Assim, ambos esses desenvolvimentos estando ligados ás nossas necessidades affectivas, foram estas que suscitaram o problema em questão.

De modo que foi o sentimento que fez surgir as concepções numericas e ainda foi elle que deu lugar á sua transformação objectiva.

Tinhamos visto que, surgidos para classificar, os numeros manifestaram sua aptidão para caracterisar os grupos, isto é, para *contar*.

(7a) Como bem observa Vico, o culto dos mortos é o privilegio essencial da Humanidade.

Essa extensão conduziu em breve a *calcular*, isto é, a *combinar os numeros*, determinando o lugar do numero resultante na escala numerica.

A vida sedentaria veio determinar o surto da ultima das applicações subjectivas dos numeros, daquella que marca o ponto de partida decisivo de sua applicação objectiva, isto é, da *medida*.

Isto quer dizer que, destinados até então ás pluralidades, os numeros passaram a ser applicados ás grandezas continuas.

Para perceber como se operou essa passagem, convém notar que as *pluralidades* podem ser apreciadas já por *contagem*, já por *medida*. Esta medida foi bem cedo apreciada quer pela extensão, quer pelo peso.

A passagem de um modo para outro foi espontaneamente determinada pela consideração de elementos sufficientemente pequenos, ou de grupos muito numerosos.

Em ambos os casos, a numeração já não permittindo a contagem, a ideia mais simples foi julgar do grupo pelo espaço que elle occupava, ou pelo esforço de carregar (peso).

Estas medidas primitivas da extensão e dos pesos mostram-nos espontaneamente a filiação existente entre a classificação e a medida, e portanto como os numeros passaram a ser empregados para este ultimo fim.

Toda a classificação produz uma medida.

Si se trata de grandezas descontinuas essa medida é mais ou menos indeterminada quanto á extensão, porém caracterisa o grupo.

Si por exemplo collocarmos um certo numero de homens, uns ao lado dos outros, a apreciação do grupo póde evidentemente ser feita pelo espaço occupado.

Conhecido o lugar occupado por cinco homens, o grupo *cinco* fica sem duvida caracterisado.

Assim, vê-se, que de toda a classificação resulta uma medida.

Tratando-se, porém, de grandezas continuas, é preciso que os intervallos em que as suppomos divididas sejam todos iguaes entre si.

D'ahi a necessidade dos *modulos*, o que não se dá na medida das grandezas descontinuas, onde a unidade é um ser isolado.

Si estas considerações nos mostram que toda a classificação produz uma medida, não é menos certo que, reciprocamente, toda a medida suppõe uma classificação.

Extendida assim a applicação dos numeros á representação das grandezas, desenvolveram-se tambem os calculos.

Mas, na applicação dos numeros á medida das grandezas, duas hypotheses podem-se apresentar: ou trata-se de medir uma grandeza até então não considerada, e neste caso só se póde proceder em ultima analyse por simples contagem; ou trata-se de saber qual o resultado da combinação de varias grandezas já avaliadas, e neste caso tem-se o calculo propriamente dito.

Tratando-se, por exemplo, de diversas expedições póde-se querer saber o numero total de guerreiros, conhecendo-se separadamente os que as constituiram; após o combate, póde-se querer saber o numero de sobreviventes, etc.

Em todo caso, os *calculos* fazem-se a principio por simples *contagem*.

Essa contagem póde ser directa ou indirecta: Ou contam-se os proprios objectos, os guerreiros, por exemplo; ou contam-se os objectos por meio de outros que os representam, taes como seixos (7b), os quaes tornam-se os seus signaes concretos.

Diz-se que os espiões indigenas contavam os inimigos guardando uma pedra por cada guerreiro que viam.

(7b) Do latim *calculus*, d'onde proveio a palavra calculo.

E comprehende-se que essa substituição impunha-se naturalmente, não só pela facilidade, como tambem pela impossibilidade de ver juntos todos os guerreiros inimigos.

Este exemplo nos mostra que os calculos poderam por muito tempo dispensar as palavras, servindo-se apenas dos signaes concretos.

Sómente muito tarde os signaes tornam-se puramente abstractos na numeração systematica, tendendo então a preponderar nos calculos os signaes *visuaes* ou *tacteis* sobre os *phoneticos* ou *auditivos*.

Isto resulta da fixação exterior do signal e do caracter mais synthetico da visão.

46. — **Mostrámos** que todo o calculo póde-se fazer sempre por simples contagem.

Essa contagem immediata só é possivel sem engano, por omissão ou repetição, quandos os calculos são restrictos; ou por serem pequenos os numeros a combinar, ou por serem muito simples as combinações; ou pelo concurso das duas circunstancias.

Então bastam quaesquer signaes para representar os numeros successivos, como ainda acontece para os primeiros termos da escala. (7c).

Mas desde que os numeros se tornam consideraveis, a numeração espontanea já não basta para calcular com segurança e facilidade.

Põe-se então o problema de systematisar a escala numerica com o fim de facilitar os calculos, isto é, de reduzir as combinações numericas a um pequeno numero de casos

---

(7c) E' isto que explica certa desharmonia, no principio da escala, entre a linguagem fallada e a escripta. Ao passo que na linguagem escripta usual, bastam dez caracteres para representar todos os numeros, na linguagem fallada precisamos de um numero muito maior; e si o calculo mental não offerece mais difficuldades, é porque nos habituamos a confundir o signal visual com o auditivo. Por exemplo, *dez* e *seis* lembra a combinação de dez e de seis, mas onze já nada lembra, como succede ainda em vinte ou trinta. De trinta e um em diante é que começa a apparecer distinctamente a raiz dos primeiros numeros.

susceptiveis de uma realisação immediata por simples contagem.

A primeira ideia que se teve foi a de extender a escala sufficientemente para assistir os calculos, e não como geralmente se suppõe, a de tornal-a indefinida.

A possibilidade de variar de modulo permittiu essa restricção.

Mas, a complicação dos calculos veio demonstrar a necessidade de extendel-a indefinidamente, porque as combinações podiam dar lugar a numeros que a escala não contivesse.

D'ahi portanto, a necessidade de instituir de antemão todas as pluralidades imaginaveis, *e tal é o objecto da escala numerica.*

50. — TRATEMOS AGORA DA DESTINAÇÃO PRINCIPAL DA ESCALA NUMERICA. — As considerações precedentes nos deixam ver qual deve ella ser.

Desde que se torna systematica, a escala numerica facilita a contagem; porém, comprehende-se que a sua principal importancia é facilitar os calculos. Mas, para isso, a constituição systematica da escala numerica deve attender não só á linguagem fallada, mas tambem á linguagem escripta. Porque os calculos devem substituir a combinação dos numeros pela combinação dos seus signaes.

E si esses não forem convenientemente instituidos, as suas combinações offerecerão difficuldades consideraveis, conforme havemos de verificar.

51. — ESCALA INSTITUIDA PELOS THEOCRATAS. — Entre os signaes phonicos e os signaes graphicos empregados na representação da escala, estes ultimos são superiores áquelles. Porque os signaes phonicos não têm uma fixidez exterior, ao passo que pela gravura ou pelo desenho, temos diante de nós objectos exteriores, que incontestavelmente facilitam as combinações numericas.

A instituição da nossa escala notada foi feita pelos theocratas e transmittida pelos arabes.

Os occidentaes não podem ter idéa da superioridade de sua numeração notada, porque não conhecem de ordinario os outros systemas.

Mas, basta uma simples comparação com a notação grega para tornar patente suas vantagens na simplificação dos calculos. Essas vantagens resultam sobretudo do valor de posição attribuido aos algarismos; de sorte que apenas com dez signaes, elles conseguiram representar todos os numeros. Em cada um destes, qualquer algarismo representa sempre unidades de ordem indicada pelo lugar que occupa a contar da direita.

O sacerdocio theocratico foi espontaneamente levado a essa instituição; porque nas cerimonias publicas, sobretudo religiosas, elle observava que a posição do funccionario indicava a sua dignidade ou valor.

A superioridade da notação dos theocratas deve, pois, ser attribuida ao ponto de vista pratico ou social em que elles se achavam collocados.

Foi esta circumstancia que o conduziu a uma systematisação, só muito mais tarde tentada pelas populações militares, onde a conquista falhou, isto é, entre os gregos.

52.— Os gregos esforçaram-se, com effeito, por conseguir um systema de numeração capaz de assistir os calculos de que tinham necessidade.

Mas, nem Archimedes extendendo a escala grega, nem tão pouco Appollonius aperfeiçoando os trabalhos de Archimedes, conseguiram chegar a resultados comparaveis aos obtidos pelos theocratas.

E' que, apezar da superioridade daquelles dois orgãos, a insufficiencia das reacções mentaes manifestava-se no meio grego, o que não tivera lugar entre os theocratas, graças á

superioridade das inspirações praticas de que se achavam possuidos.

§ η′ (8)

Concepção systematica da escala numerica

53. — Exame especial da constituição da escala. — Directamente examinada na sua constituição actual, a escala numerica se nos apresenta como uma jerarchia de grupos construidos sob dois typos.

Esses grupos são representados por um duplo systema de signaes phonicos e graphicos, como as demais concepções condensadas pela linguagem.

O primeiro dos typos, a que nos referimos, consiste na fixação immediata de alguns dos gráos successivos iniciaes da pluralidade.

São esses gráos que formam as abstracções chamadas *numeros simples*, e na linguagem fallada ou escripta são representadas por signaes empiricos.

O segundo typo repousa na instituição das *unidades compostas*.

As unidades collectivas ou compostas são pluralidades que se consideram como formando um só todo.

Os signaes complexos que as representam resultam de uma combinação que traduz a constituição de taes unidades.

A concepção da escala numerica repousa pois:

1°. na noção de unidade simples.

2°. na noção de unidades compostas de diversas ordens.

Esta concepção das unidades compostas, e, portanto, da numeração que ahi tem a sua ideia fundamental, foi necessariamente concreta antes de se tornar abstracta.

---

(8) Lettra grega éta que assim accentuada exprime o numero 8. (októ).

E' o que o attesta ainda hoje o antigo *systema de pesos e medidas*, onde vemos na medida do tempo um certo numero de dias constituindo o mez, um outro numero de mezes constituindo o anno, etc.; na medida de comprimento um certo numero de palmos constituindo a vara, um outro numero de varas a braça e assim por deante.

As unidades collectivas nos permittem fazer uma ideia exacta das grandezas consideradas, suppondo-as assim decompostas em elementos multiplos e distinctos.

Todavia, cada unidade composta não se forma a principio por meio do *mesmo* numero de unidades simples, e esta falta de uniformidade complica evidentemente a numeração.

E' a isto que se deve attribuir a principal difficuldade da numeração concreta e espontanea, onde vemos por exemplo a vara se derivando do palmo de modo differente daquelle por que a braça se deriva da vara e assim por deante (8a).

Quando, porém, graças ao ascendente da vida pratica, a numeração torna-se systematica, as unidades compostas deduzem-se uma das outras de uma maneira regular; o que se consegue tomando sempre o *mesmo numero* de unidades simples ou compostas para formar a unidade de gráo superior.

Este numero, tomado ao principio empiricamente, é o que chamamos base do systema de numeração.

Parece que o habito espontaneo de contar pelos dedos levou, a principio, a utilisar o numero *cinco* e depois instinctivamente o numero *dez* que foi logo adoptado por toda a parte.

Mas, não se póde essencialmente attribuir a preferencia desta base senão á necessidade de augmentar a taxa dos agrupamentos, emquanto a numeração achava-se limitada aos seus primeiros gráos.

(8a) O antigo calculo dos numeros complexos offerece a vantagem logica de nos deixar perceber similhante difficuldade.

Ordenando os numeros por grupos iguaes, esta systematisação torna finalmente compostos os nomes primitivamente simples, para designar o grupo em que se acha o numero considerado, e o lugar que este ahi occupa.

Todavia, cumpre reconhecer que esta instituição foi menos destinada a diminuir a quantidade dos nomes usados, do que a contar mais longe sem introduzir outros.

Os nomes usados sómente se compõem com os dos numeros inferiores á base, quando um tal systema se tem plenamente desenvolvido.

54.— 1º GRÁO DE COMPOSIÇÃO: SEU ADVENTO. — A principio não se passou do agrupamento immediato, não havendo, portanto, senão duas ordens de unidades. Devemos olhar uma tal instituição como espontaneamente suscitada pelo espectaculo social, onde vê-se as nações resultarem, não da aggregação directa dos individuos, mas do concurso das familias, o que exige uma dupla designação para cada um daquelles.

55.— REDOBRAMENTO DO ARTIFICIO. ADVENTO DO 2º GRÁO DE COMPOSIÇÃO. — Uma observação analoga inspira tambem o advento do 2º gráo de composição, quando muitas tribus reunem-se em expedições temporarias, de maneira a motivar uma triplice denominação para cada individuo.

Effectivamente a numeração fica por muito tempo limitada a dois gráos successivos de composição, offerecendo apenas tres ordens de unidades, a saber: unidades simples, unidades de 1ª ordem e unidades de 2ª ordem.

Isso explica-se pelo facto de não ter a vida pratica, industrial ou militar, exigido a principio contagens ou combinações muito consideraveis. Tendo surgido sob o fetichismo, antes da existencia sedentaria, esta instituição das unidades compostas foi desenvolvida pelo sacerdocio theocratico, logo que as necessidades praticas o exigiram.

Inventados os dois primeiros gráos de composição, tornou-se facil introduzir seguidamente outros, sendo apenas necessario regularizal-os mediante uma taxa uniforme no agrupamento gradual.

Espontaneamente suggerida pelo espectaculo social, onde muitas familias encontram-se com o mesmo numero de membros, a uniformidade dos grupos, isto é, a igualdade das unidades collectivas e abstractas, foi emfim estabelecida pela sabedoria theocratica.

A taxa de agrupamento adoptada foi, como já dissemos, o numero *dez*.

Depois de haver dado a cada um dos nove primeiros numeros um nome distincto, chamou-se *dez* ao numero seguinte. Este numero dez, escolhido para base do systema, formou a primeira unidade composta, tambem chamada *dezena*.

Desde então contou-se por dezenas ou unidades de 2ª ordem, como por unidades simples: uma dezena, duas dezenas....... nove dezenas.

(Em lugar destas palavras, empregamos hoje suas abreviações: *dez* ou *enta*, vinte (abreviação de vienta), trinta (abreviação de trienta) quarenta, cincoenta..... noventa).

Entre duas collecções consecutivas de dezenas, os nove numeros intermediarios foram designados por palavras compostas que lembram o nome do grupo de unidades simples: dez e um (ou por abreviação onze), dez e dois (ou doze), dez e tres (ou treze)..... dez e nove (ou dezenove), vinte e um, vinte e dois...... vinte e nove; trinta e um, trinta e dois, ... trinta e nove;...... noventa e um, noventa e dois ...... noventa e nove.

A collecção de dez dezenas foi considerada como uma unidade de terceira ordem, e denominada *centena* ou *cento*.

Desde então, contou-se por centenas como se havia contado por unidades e dezenas: uma centena ou um cento, duas

centenas ou dous centos, tres centenas ou tres centos...... nove centos. (Por abreviação diz-se cem, duzentos, trezentos e quinhentos...... novecentos.)

Entre duas collecções consecutivas de centenas, os noventa e nove numeros intermediarios foram designados por palavras compostas que indicam o grupo de centenas, o de dezenas e o de unidades simples: cento e um, cento e dois, ... cento e dez, cento e onze,..... cento e dezenove, cento e vinte, cento e vinte e um; cento e trinta, cento e trinta e um .....; cento e quarenta......; cento e cincoenta.....; duzentos, duzentos e um, etc.; tresentos e um....., quatrocentos.....; quinhentos, quinhentos e um.....; e assim até novecentos e noventa e nove.

O numero seguinte, representando uma collecção de dez centenas, veio pelo mesmo motivo constituir uma unidade de quarta ordem, a que se chamou *milhar* ou *mil*.

Contou-se desde então por milhares ou mil como se havia contado por centenas, por dezenas e por unidades simples, dando aos numeros intermediarios denominações compostas analogas ás já estabelecidas.

A collecção de dez milhares formou uma unidade de quinta ordem chamada *dezena* de *milhar* (dez mil), seguindo-se quanto aos numeros intermediarios a marcha anteriormente adoptada.

A collecção de dez dezenas de milhares formou uma unidade de sexta ordem a que se denominou centena de milhares (cem mil) e se contou por unidades, dezenas e centenas de milhares até *novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Comquanto nada impossibilitasse de redobrár o artificio, durante muito tempo não se foi mais longe; porque as necessidades praticas não exigiram que se dessem nomes aos numeros seguintes.

Só modernamente inventou-se a palavra *milhão* para designar mil *mil*, isto é, a collecção de *mil milhares*; a palavra *bilhão* para designar a collecção de mil milhões, a palavra *trilhão* para designar a de mil bilhões e assim por deante.

Comquanto *dez* seja a *taxa* ou base do systema de numeração inventada pelos theocratas, e hoje vulgarisado em todo o occidente, comprehende-se que os principios que regem similhante instituição têm inteira applicação a uma taxa qualquer.

Si quizessemos, por exemplo, instituir pela mesma marcha, a escala *septimal*, a questão se resolveria immediatamente *contando por grupos de sete, ao envez de contar por grupos de dez*.

Generalisando as palavras usadas diriamos: um, dois, tres..... sete ou uma septena (ou abreviadamente uma enta) sete, sete e um, sete e dois,..... sete e sete, ou duas septenas (ou abreviadamente duenta ou vienta ou vinte); duenta e dois (ou vinte e dois).... duenta e seis (ou vinte e seis), trienta ou *trinta*, trienta e um (ou trinta e um), trinta e dois (ou trienta e dois).... trienta e seis (ou trinta e seis), quatrienta ou *quarenta*, quarenta e um.... *cincoenta*, cincoenta e um.....sessenta, sessenta e um, sessenta e dois.... sessenta e seis, sete enta ou *cem* ou cento
cento e dois.... cento e seis
cento e vinte,....cento e t
e sessenta e um, cento e se
seis, *duzentos* e assim por

Si a base adoptada foss
dois.....*doze*, doze e um.
duenta (vinte), duenta e um
trienta; quarenta; cincoent
noventa; dezenta; onzenta; o
onzenta e dez, onzenta e onze

Em primeiro lugar esta escala nos offerece um verdadeiro typo das construcções scientificas, em que para satisfazer suas necessidades moraes, intellectuaes e praticas, a Humanidade escolhe os materiaes que o mundo lhe offerece e os combina de accordo com o preceito que nos força a *subordinar todas as nossas constituições subjectivas aos materiaes objectivos*.

Mas, ao mesmo tempo, a construcção da escala numerica nos dá a ideia das *jerarchias* ou *classificações*.

Ahi verifica-se *espontaneamente a tendencia constante de entendimento humano em proceder do geral para o particular, quando faz uma classificação qualquer*.

Vê-se, com effeito, que cada unidade de uma ordem abrange todas as de ordem inferior, e, em geral, que cada numero condensa, por assim dizer, todos os anteriores.

Mas, além desses preceitos logicos, a construcção da escala numerica verifica outros, taes como a *tendencia do espirito humano em fazer a hypothese mais simples*; *a existencia de leis interiores e exteriores a nós*; *a possibilidade de modificar a intensidade dos phenomenos sem alterar o seu arranjo* (a maneira de grupar os numeros é com effeito inalteravel, mas nós podemos variar a taxa de seu agrupamento), etc.

Porém na *classificação* que nos offerece a escala numerica, a *tendencia em proceder do geral para o particular*, torna-se sobretudo notavel no enunciado dos numeros. Porque uma tal disposição fez espontaneamente nascer o habito de enunciar um numero *começando pelas unidades de ordem mais elevada e descendo successivamente até a mais fraca*.

Similhante habito é tão natural que prevaleceu sempre, apezar da constituição inversa das linguas antigas, taes como a grega e a latina; não se encontrando nenhum exemplo da representação invertida dos numeros.

E assim deve ser, porquanto a outra marcha seria contraria á nossa intelligencia, que tem sempre necessidade de apreciar primeiramente o conjuncto para depois descer aos detalhes.

Ao contrario, quando enunciamos um numero, partindo do geral para o particular, isto é, das unidades de ordem mais elevada para as de ordem mais fraca, temos a vantagem de fixar dois limites, superior e inferior, entre os quaes o mesmo numero está comprehendido; e estes limites se approximam progressivamente até se confundirem no momento em que, emfim, se enunciam as unidades simples.

Quando, por exemplo, enunciarmos o numero: *sete mil seiscentos e trinta e quatro*, vemos que estes limites são a principio *sete mil*.... e *oito mil*; depois *seis centos* .... e *sete centos*, em seguida *trinta*.... e *quarenta*, e finalmente.... *quatro*.

O conjunto das considerações precedentes basta para caracterisar a concepção da escala numerica.

Devemos agora nos occupar especialmente da sua expressão.

§ θ' (9)

Expressão da escala numerica

63. — Póde-se facilmente observar que o aperfeiçoamento da concepção nunca é acompanhado do da expressão.

E isto se verifica relativamente ás concepções numericas, as quaes já estavam constituidas sem que entretanto sua representação, tanto falada como escripta, e sobretudo esta ultima, podesse assistir convenientemente os calculos, como acontece hoje.

(9) Lettra grega *téta*, que assim accentuada exprime o numero 9 (enéa)

Entretanto, similhante assistencia impunha-se necessariamente, afim de que a combinação dos numeros podesse ser substituida pela combinação de seus signaes, auxiliando assim a meditação, tanto inductiva como deductiva.

Para apreciar como constituiu-se similhante representação e bem assim suas difficuldades principaes, precisamos fazer algumas considerações geraes sobre a linguagem humana.

« A linguagem humana nasceu da necessidade de communicar nossos sentimentos, o que equivale dizer que ella foi affectiva antes de ter um destino intellectual e um objectivo pratico.

Mas, concebida sob o primeiro aspecto, a linguagem devia utilisar todos os nossos sentidos, e dahi tantas linguagens quantos os sentidos que directamente permittem nossa communicação com o exterior.

Na especie humana, como nas especies superiores, só ha com effeito tres sortes de linguagens correspondentes aos tres sentidos susceptiveis de serem affectados de longe, a saber: a *visão*, a *audição* e a *olfação*.

Póde-se mesmo dizer que ellas ficam reduzidas á linguagem phonetica e á visual, por causa da extrema imperfeição que tem no homem o ultimo dos sentidos citados.

Mas, naturalmente uma e outra quasi que se reduzem a principio á simples reproducção dos actos correspondentes ás emoções.

Esta linguagem primitiva (gestos e gritos), revestindo-se de um caracter esthetico, em virtude de sua applicação caracteristica ás mais poderosas emoções, faz surgir as duas artes fundamentaes, a *mimica* e a *musica* (canto), a primeira correspondente á visão e a segunda á *audição*.

A mimica, mais espontanea, torna-se a linguagem por excellencia, prevalecendo por muito tempo sobre o canto.

Este, não podendo a principio ser fixado, torna-se uma linguagem de occasião.

O contrario se dá com a mimica, cujos resultados essenciaes sendo fixados, conduziram as duas principaes artes da fórma, a principio a *esculptura*, e em seguida o *desenho*, donde finalmente deriva toda a parte visual da linguagem humana.

Mas o *canto*, donde provém sua parte auditiva, vai adquirindo, graças ao desenvolvimento do espirito humano, uma notavel preferencia sobre a expressão mimica; de sorte que a linguagem visual acaba por tornar-se um simples auxiliar da linguagem auditiva.

Em virtude da reacção crescente dos signaes vocaes, a musica decompõe-se em duas partes, uma mais affectiva, a *musica* propriamente dita, e outra mais intellectual, a *poesia* propriamente dita.

Esta tende naturalmente a preponderar, á medida que as necessidades intellectuaes fazem sentir a necessidade de uma linguagem menos synthetica, onde as noções possam ser mais bem formuladas.

A linguagem poetica, desde então predominante sobre a musical, decompõe-se pelo mesmo motivo em *poesia propriamente dita* e em *prosa*, sendo esta unica que veio permittir o livre desenvolvimento do destino activo e especulativo da linguagem humana.

Dissemos que a mimica primitiva havia engendrado a *esculptura* e o *desenho*, afim de fixar suas expressões essenciaes.

Ora, a mesma necessidade se fez tambem mister para a lingugem auditiva, cuja fugacidade é ainda mais pronunciada.

Como, porém, similhante linguagem não suscitou nenhuma arte especial susceptivel de remediar um tal inconveniente, ella não póde, apezar de sua definitiva pre-

ponderancia, dispensar a assistencia da linguagem visual, que se tornou assim seu complemento indispensavel.

Quando a mimica fez surgir a *pintura* e mesmo a *esculptura*, esta assistencia normal se realisou naturalmente por meio de *desenhos* ou *relevos*, destinados a conservar o equivalente das principaes fórmas.

Dahi resultou a primeira escriptura humana, constituindo um systema completo de signaes visuaes, parallelo ao dos signaes vocaes.

E' a escriptura *hieroglyphica* adoptada pelos theocratas e então vulgarisada por toda a parte.

O desenvolvimento dessa linguagem, que representava sons completos, mostrou bem cedo que ella podia tambem representar elementos de sons, isto é, as *syllabas*, cuja escripta vem se resolver afinal na das vogaes e das consoantes.

Passou-se assim da linguagem *hieroglyphica* para a linguagem *alphabetica* ou *syllabica*, que as classes meditativas desenvolveram mais a mais até o estado em que a encontramos.»

Em virtude das considerações precedentes, comprehende-se que a numeração, uma vez systematisada, passou a ser traduzida, tanto na linguagem fallada, como na escripta, sendo evidente que aquella representação precedeu a esta.

64. — A representação escripta, porém, impoz-se naturalmente, em vista da necessidade de *calcular*.

Comprehende-se com effeito, que a numeração não podia satisfazer o seu destino fundamental, sem um systema de escripta aperfeiçoado que permittisse substituir a combinação dos numeros pela combinação de signaes.

Estes signaes, sendo convenientemente fixados, os numeros como que ficam substituidos por objectos exteriores a nós, o que evidentemente facilita as combinações numericas.

65. — Todos os signaes especiaes destinados a representar os numeros elementares foram suggeridos, pela escriptura *hieroglyphica*.

O habito de contar pelos dedos forneceu naturalmente estes primeiros signaes numericos (9a), que foram gradativamente se simplificando.

Tudo leva a crer que são de origem *hindú*, sendo certo que foram transmittidos ao occidente pelos *arabes*.

O signal actualmente destinado a representar o zero parece ter sido nas linguas arabes ou hindús a inicial da palavra *nada*, quando já era conhecida a escriptura alphabetica.

Tendo representado pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 o numero de unidades de cada especie, é evidente que para pôr a numeração escripta em harmonia com a fallada, era preciso representar tambem o valor de cada especie de unidade. Ora, já dissemos que esta questão foi resolvida pela sabedoria do sacerdocio theocratico, attribuindo a cada algarismo dous valores : um *proprio* ou intrinseco e outro *relativo* á sua posição no numero escripto.

De sorte que um numero composto de unidade de diversas ordens foi ainda notado com aquelles mesmos caracteres, sob a condição de que *cada algarismo escripto á esquerda de outro exprimisse unidades dez vezes maiores.* Todavia, como certas ordens podiam não existir no numero enunciado, inventou-se para preencher essas lacunas um outro signal, o que chamamos *zero* ; o qual não tendo valor proprio, serve entretanto para dar ao algarismo immediato o valor de posição correspondente. (Foi a principio representado por um ponto, mais tarde por dois traços verticaes ; depois por um circulo e finalmente por uma ellipse.)

(9a) Vide Hœfler, Histoire des Mathematiques.

Por este motivo é que para notar um numero enunciado *escreve-se primeiramente as unidades de ordem mais elevada e depois as seguintes, á medida que forem enunciadas, tendo o cuidado de preencher com zeros as ordens que por ventura faltarem*. Para maior clareza, colloca-se muitas vezes um ponto depois do algarismo das unidades de cada classe; ou então deixa-se um intervallo entre esse algarismo e o das centenas da classe seguinte.

Assim sete milhões dois mil e cento e trinta e cinco, escreve-se 7002135 ou 7.002.135.

Reciprocamente, para enunciar ou ler um numero escripto costuma-se *dividir o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, dando á 1ª classe o nome de unidades, á 2ª o de milhares, á 3ª o de milhões, á 4ª o de bilhões, etc.; depois lê-se o da esquerda para a direita, dando a cada classe a denominação respectiva.*

B M m u
Assim é que 6.453.893.210 lê-se 6 bilhões, 453 milhões, 893 mil e 210 unidades.

Comprehende-se, porém, que similhante modo de decompor em grupos ou classes o numero considerado, com o fim de enuncial-o, não é absoluto, conforme parece.

Veremos, com effeito, que póde variar não só na numeração concreta, mas mesmo na numeração abstracta. Naquella, as classes podem ser constituidas differentemente, recebendo varias denominações, conforme a unidade de medida empregada; nesta, a enunciação póde variar tambem, como acontece muitas vezes para os numeros não muito consideraveis. (Assim é por ex., que o numero 1889 póde ser enunciado como *dezoito centos e oitenta e nove*, e este modo é muito usual entre os inglezes.) Si fosse preciso enunciar numeros muitissimo consideraveis (de 44 algarismos por exemplo), poder-se-hia dividil-os em classes de quatro algarismos; e, por analogia, dar á 1ª o nome de

unidades, á 2ª o de *myriades* ou *myrias*, á 3ª o de myriades de myriades ou *myriões*, á 4ª o de *biriões*, á 5ª o de *tririões*, etc.

66. — Representação alphabetica. — A escriptura alphabetica, principalmente adoptada entre as populações militares, permittiu, sem nenhum artificio especial, a escriptura directa dos numeros, como ainda hoje usamos, nas transacções commerciaes.

A nomenclatura numerica era pois notada com todas as lettras, como quaesquer outras palavras.

As necessidades praticas levaram, porém, a uma primeira simplificação: os nomes das diversas ordens de unidades foram notados simplesmente pelas suas iniciaes, como ainda o attesta hoje a notação romana, onde *M* representa mil, *C* cem e etc.

Comquanto similhante escriptura se tivesse vulgarizado entre os occidentaes, comprehende-se que ella não podia assistir convenientemente aos calculos quaesquer.

Para que isto se desse foi preciso o concurso dos orientaes, não só com a instituição dos signaes especiaes para representar os primeiros numeros, mas principalmente com uma outra abreviação, destinada a simplificar a indicação do *numero das diversas unidades collectivas*.

Esta ultima consistiu, comos vimos, em distinguir o valor das unidades numericas mediante *lugar occupado pelos signaes* ou *algarismos* correspondentes.

Esta idéa de representar com os mesmos symbolos as differentes especies de unidades, utilisando apenas a posição dos algarismos respectivos, tem a sua origem na observação das classificações sociaes.

Os theocratas vendo que nas cerimonias publicas, etc., a posição occupada pelo funccionario era um dos signaes

caracteristicos do valor da funcção, foram naturalmente levados a reconhecer que, reciprocamente, o logar podia bastar para designar o valor.

Nada impedia de estender aos numeros similhante apreciação, sobretudo tendo em vista os habitos provenientes de seu estudo ordinal.

Desde então, todo o algarismo *passou a representar unidades de ordem marcada pelo lugar por elle occupado no numero, a contar da direita.*

O symbolo *zero*, assignalando as ordens não existentes, veio portanto servir para dar aos algarismos immediatos o valor de posição correspondente. (9b).

Guiada pela nomenclatura, a notação numerica chegou assim ao estado de aperfeiçoamento em que hoje se encontra.

Tendo em vista a nossa tendencia em proceder sempre do geral para o particular, comprehende-se o motivo pelo qual ao escrever um numero qualquer enunciado, nós *começamos pelas unidades de ordem mais elevada e assim continuamos successivamente da esquerda para a direita na ordem da enunciação, tendo o cuidado de preencher com zeros as ordens que porventura faltarem.*

Assim, o número decimal *trinta milhões tres mil e cinco unidades*, escreve-se 30003005; e pela mesma razão o numero septimal *trinta mil e duzentos e sete* será escripto 30210.

100. — Os ALGARISMOS ROMANOS. — Conhecendo o modo por que os orientaes chegaram á actual escriptura numerica, digamos alguma cousa sobre os esforços que no mesmo sentido foram empregados pelos occidentaes. Antes do surto theorico peculiar aos gregos, os romanos se haviam esfor-

(9b) Foi a principio representado por um ponto, mais tarde por dous traços verticaes (abreviação devida ao primeiro uso do *abacus*), e finalmente pela lettra o. (Circulo e ellipse).

çado para obter uma escriptura numerica, capaz de satisfazer suas necessidades.

Entregues á actividade militar e portanto não necessitando de grandes calculos, elles não podiam chegar a uma notação comparavel á oriental. Os nove primeiros numeros eram representados pelos signaes I, II, III, e depois IV, V, VI, VII, VIII e IX ; mas estes symbolos não tinham propriamente um valor de posição, como succede na notação vulgar.

A notação romana obedecia antes á *justa-posição* dos symbolos; por exemplo: X representando dez, (9c) XX representava vinte e XXX representava trinta, etc.

As unidades de diversas ordens eram ordinariamente representadas pelas iniciaes dos nomes correspondentes, como se vê em C que significa *cem*, e *M* que significa *mil*.

Todavia esta escriptura foi dotada de certas simplificações, a saber :

1.ª Em logar de continuar a representar as unidades superiores pela justa-posição das iniciaes, utilisou-se simplesmente a primeira lettra com um, dois... traços horisontaes por cima, conforme o numero de vezes que o valor da inicial devia ser multiplicado por mil.

Assim $\overline{I}$ representava mil, $\overline{X}$ dez mil, $\overline{C}$ cem mil, etc.

2.ª Comquanto a justa-posição não fosse abandonada para os numeros intermediarios como em $\overline{XX}$, para designar vinte mil, $\overline{CC}$ para indicar duzentos mil, ficou estabelecido que todo o symbolo escripto antes de outro que representasse um valor superior, devia ser subtrahido delle, e que sómente se devia sommal-o no caso contrario.

Assim, por exemplo, o numero quinhentos sendo representado por D, DC representa seiscentos (quinhentos

(9c) Segundo Hœffer, este symbolo não é mais do que a simplificação de um outro, que representava duas mãos cruzadas.

mais cem); ao passo que CD representava quatrocentos (quinhentos menos cem). Do mesmo modo, a lettra L representando cincoenta, LX será sessenta e XL será quarenta.

Comquanto os romanos adoptassem uma escriptura alphabetica muito superior á hieroglyphica, sente-se que a sua notação numerica é muitissimo inferior á notação inventada pelos orientaes.

Cumpre, todavia, reconhecer que uma tal notação satisfazia plenamente a esse povo essencialmente guerreiro, mais occupado em contagens do que em combinações numericas.

101.— Notação grega.—Os gregos embora possuissem uma notação numerica mais perfeita do que a dos romanos, achavam-se tambem em posição inferior quanto á notação oriental.

Sua maneira de representar era a seguinte:

Os nove primeiros numeros eram assignalados pelas nove primeiras lettras de seu alphabeto.

α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, θ ;

as nove lettras seguintes,

ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ,

serviam para representar as dezenas; e as nove ultimas,

ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ ω, ϡ,

serviam para notar as centenas.

Chegado aos milhares, começava-se novamente o alphabeto, tendo o cuidado de assignalar cada lettra com uma pequena linha ou traço vertical, collocado abaixo; assim por exemplo: α representava um e α͵ representava mil, β representava dois e β͵ representava dois mil, e assim por diante.

(Note-se que o alphabeto grego só tem hoje 24 lettras, porquanto as que representam os numeros 6, esti, 90, kopa, e 900, zampi, desappareceram delle). Para distinguir os numeros das palavras que o conjuncto de seus signaes podiam formar, collocavam de ordinario um accento na ultima lettra da direita.

Para exprimir um numero de myriades ou de 10000, bastaria por um traço sob a lettra; e esta notação é empregada com effeito por alguns autores gregos.

Mas os geometras indicavam um numero de myriades, servindo-se da lettra inicial *M* encimada pelo numero correspondente.

Assim $\overset{\alpha}{M}$, $\overset{\beta}{M}$, $\overset{\gamma}{M}$, $\overset{\delta}{M}$, etc., representavam 10000, 20000, 30000, 40000 e etc.; de modo que a lettra *M*, collocada abaixo de um numero qualquer, produzia o mesmo resultado que hoje obtemos escrevendo quatro zeros á sua direita.

Esta notação, incontestavelmente commoda é a que Eudocius emprega em seus «Commentarios» sobre Archimedes.

Mas Diophante e Pappus, para designar as myriades, serviam-se das duas lettras iniciaes *Mυ*, collocadas depois do numero.

Assim α *Mυ*, β *Mυ*, γ *Mυ*, etc. representavam 10000, 20000, 30000, e assim por diante.

Os mesmos autores empregavam ainda uma notação mais simples, que consistia em substituir por um ponto as iniciaes *Mυ*; assim, por exemplo ͵δτοβ.͵ηϙζ valiam tambem 43728097. Os gregos podiam notar assim até o numero 99999999, que escreviam ͵θϡϙθ.͵θϡϙθ; uma unidade mais teria feito uma myriade de myriade ou cem milhões.

Até ahi chegava a escala dos gregos; e esta extensão lhes bastava, mesmo porque suas unidades de medida,

taes como o *talento*, a *stadia*, eram mais fortes que as nossas.

Todavia, os geometras e os astronomos foram algumas vezes levados a ultrapassar esses limites.

Por exemplo, Archimedes, na sua *Arenaria*, propondo-se a exprimir o numero de grãos de areia contidos em uma esphera, cujo diametro fosse a distancia da Terra ás estrellas fixas, (é este numero, segundo elle, o que nós exprimiriamos hoje com 64 algarismos) viu-se obrigado a prolongar muito a escala notada.

Para isso elle tomou a myriade para unidade nova e os numeros desta especie elle chamou de *segunda ordem*.

Desta maneira chegava a exprimir todos os numeros que em nosso systema escrevem-se com 16 algarismos.

Tomando depois para unidade nova, a unidade seguida de 16 zeros, elle formou os numeros de *terceira ordem* ; com a unidade seguida de 24 zeros, os numeros de *quarta ordem*. (9d) e (9e).

Vê-se, pois, que esses aperfeiçoamentos introduzidos na notação grega por Archimedes, secundado por alguns outros, melhorados depois por Appollonius, teriam espontaneamente conduzido a uma notação equivalente á nossa, si esta não houvesse sido transmittida pelos orientaes. (9f).

(9d) « Delambre. L'Arithmetique chez les Grecs.» 1er vol. de l'Histoire de l'Astronomie.

(9e) Por ahi se vê, que Archimedes dividia na realidade os numeros em collecções successivas, correspondendo á nossas classes de oito algarismos. Depois delle, Appollonius approximou-se mais do nosso systema, compondo as classes somente com quatro algarismos: A 1ª á direita era a das unidades, a 2ª a das myriades simples, a 3ª a das myriades duplas ou de 2ª ordem, e assim por diante.

As differentes classes eram marcadas por um traço, de sorte que Appollonius lhes attribuia propriamente um valor de posição. Si este geometra tivesse feito para as simples dezenas o que foi levado á fazer para as dezenas de mil, teria sem duvida creado o nosso systema actual de numeração. *Comberousse-Arithmétique*.

(9f) Il est bien singulier que de profonds genies aient passé ainsé à côté de la numération décimale sans en apercevoir les principes et les avantages. « Comberousse — Arithmétique», pag. 46.

102. — O ESTADO SOCIAL, SUA INFLUENCIA SOBRE AS NOTAÇÕES. — Finalmente, não devemos deixar sem reparo que os occidentaes, apezar de possuirem orgãos eminentes como Archimedes e Appollonius, e empregarem já a escriptura alphabetica incontestavelmente superior a hieroplyphica, não chegaram a descobrir uma notação numerica comparavel á dos orientaes.

Mas este facto, que parece uma anomalia, tem comtudo uma explicação mui plausivel.

Si a sabedoria theocratica soube admiravelmente utilisar a aptidão especial dos habitos hieroglyphicos para fundar o melhor systema de escriptura numerica, isto foi devido ao ponto de vista synthetico em que se achavam collocados; o que não teve equivalente no occidente, onde sempre dominou a cultura especialista.

Isto nos mostra que não ha synthese parcial; e nos leva naturalmente a guardar uma sincera gratidão para com as populações fetichicas e theocraticas, que nos legaram tão grande beneficio, incluindo entre ellas os musulmanos, que foram por assim dizer o élo entre a cultura dos occidentaes e a dos gregos por um lado, e por outro, entre a cultura oriental e a occidental.

CAPITULO IV

Instituição da numeração normal: Systema de numeração septimal, abstracta e concreta. Apreciação dos calculos necessarios para mudar o systema em que os numeros se acham escriptos.

§ ι' (10)

Instituição da numeração septimal; sua comparação com a decimal

103. — Póde-se sempre conceber a constituição numeral sem nenhuma determinação da taxa uniforme dos agrupamentos successivos, isto é, do numero de unidades de uma ordem necessario para formar outra de ordem immediatamente superior.

Vimos, com effeito, que com uma taxa ou *base* qualquer, a numeração, sua nomenclatura e sua notação tornam-se plenamente systematicas, quando aquelle módulo è invariavelmente applicado em todos os gráos de ascensão da escala. Entretanto, precisamos agora completar a systematisação numeral, examinando qual a base que melhor lhe convém. No ensino ordinario expõe-se sempre a theoria da numeração de base decimal, como si nenhuma outra fosse possivel. Comprehende-se porém, que similhante marcha nada tem de racional; porquanto uma tal base tendo sido adoptada empiricamente, seria mesmo de admirar que coincidisse com a mais conveniente ao conjuncto de nossas necessidades. A escolha da base *dez*, como a principio a da base cinco, parece ter sido suggerida pelo habito de contar pelos dedos, e haver obedecido á necessidade de augmentar a taxa de agrupamento, emquanto a systematisação da escala estava

(10) Lettra grega *iota* — que assim accentuada exprime o numero 10 — (déka).

limitada aos primeiros gráos. Aliás, o mesmo motivo determinou o emprego provisorio de bases maiores, como o attesta ainda hoje o habito de contar por duzias, vintenas, etc.

Foi *Leibnitz* quem pela primeira vez, no começo do seculo XVIII (10a) examinou a conveniencia da *base* adoptada.

Propoz como sendo mais simples a base dois, isto é, o systema *binario*. Embora frustrada, a tentativa de Leibnitz teve a vantagem de mostrar a relatividade dessa instituição, até então olhada como absoluta, representando ao mesmo tempo uma disposição systematica para diminuir a base da numeração usual.

Todavia, similhante problema só foi posto definitivamente pela Revolução Franceza, por occasião do conflicto entre a antiga e a nova numeração concreta que o governo revolucionario tentou implantar.

O conflicto deu-se sobretudo, quando este quiz tornar decimal o agrupamento mais usual dos dias, (semana e dècada).

E foi examinando as causas de um tal mallogro, que Augusto Comte apresentou afinal a solução deste magno problema, optando pela base *sete*, isto é pelo systema de numeração *septimal*. (10 b).

A respeito deste assumpto diremos apenas duas palavras, visto como não faz parte do Programma Official.

104. — E' a principio evidente que a base normal não póde estar comprehendida entre limites muito distantes da base actualmente adoptada. Porque, sendo muito grande, augmentaria consideravelmente o numero de *combinações*

(10a) V. Mémoire de l'Académie des sciences de Paris (anno 1703).

(10b) Formé de deux progressions suivies d'une synthèse, ou d'une progression entre deux couples, le nombre sept, succédant á la somme des trois nombres sacrés, determine le plus vaste groupe que nous puissions distinctement imaginer. Réciproquement, il pose la limite des divisions que nous pouvons directement concevoir dans une grandeur quelconque. Un tel privilége doit systématiquement conduire á le prendre pour base de la numération finale, tant concréte qu'abstrait. (A. Comte. — Synthèse Subjective, chap. I, pag. 127-128).

elementares a ter de cór, (addicção, subtracção, multiplicação e divisão dos numeros simples) sempre equivalente á segunda potencia do penultimo algarismo. Reciprocamente, sendo pequena, ainda que facilitasse os calculos a esse respeito e tambem por diminuir o numero de caracteres, teria o inconveniente de tornar extensa a escriptura dos numeros, mesmo pouco consideraveis, e de exigir uma extrema attenção para escrever os numeros com poucos caractéres, sem commetter omissão nem repetição. Para melhor comprehender os inconvenientes de uma base pequena, basta comparar as duas escalas que damos em seguida, a primeira no systema decimal e a segunda no binario.

1	2	3	4	5	6	7
1	10	11	100	101	110	111

8	9	10	11	12
1000	1001	1010	1011	1100

13	14	15	16
1101	1110	1111	10000

105.— Segundo Augusto Comte, a base sete não offerece nenhum dos inconvenientes acima indicados.

O numero de caracteres ou algarismos fica apenas reduzido a seis, não incluindo o zero; e o numero de combinações elementares entre estes, eleva-se sómente a vinte e cinco, ao envez das sessenta e quatro que a arithmetica decimal nos impõe á memoria.

Além disso, o numero sete não se podendo decompor em factores, como acontece com a base decimal (dez—igual a cinco vezes dois), veremos que similhante *irreductibilidade* tem a vantagem de não complicar inutilmente o resultado dos calculos. Esta vantagem será evidenciada quando estudarmos o calculo fraccionario.

106.— As propriedades subjectivas do numero sete (tres mais tres mais um; dois mais tres mais dois; um mais

dois mais tres e depois sete) motivam systematicamente a sua preferencia. Dellas se conclúe, com effeito: 1°. que relativamente á concepção das *pluralidades*, sete é o maior grupo que podemos distinctamente conceber como numero concreto; 2°. que relativamente á concepção das grandezas continuas, sete marca o limite das divisões que podemos directamente conceber.

Para melhor apanhar a superioridade da escala septimal, damol-a em seguida acompanhada da decimal e da duodecimal, sendo que nesta ultima representamos por a e b os dois caracteres necessarios para escrever respectivamente os numeros simples dez e onze. (Vêr tambem, e comparar com as seguintes, a escala binaria acima).

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24..., 26, 30, 31..., 36, 40, 41..., 46, 50..., 56, 60..., 65, 66, 100, 101..., 106, 110..., 120..., 140..., 150..., 160..., 200, 201, 202..., 300, 400, 401, 402, 403, 404..., 500..., 600..., 1000...

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18..., 20, 21, 22..., 27, 28, 29..., 34, 35..., 41, 42..., 47, 48, 49, 50..., 55, 56..., 63..., 70..., 77..., 84..., 92..., 98, 99, 100..., 147..., 196, 197, 198, 199, 200..., 245..., 343...

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a b 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16..., 18, 19, 1 a 1 b..., 23, 24, 25..., 2 a, 2 b..., 35, 36..., 3 b, 40, 41, 42.... 47, 48..., 53..., 5 a..., 65..., 70..., 78..., 82, 83, 84..., 103..., 144, 145, 146, 147, 148..., 185..., 206..., 247...

110.—Dissemos, no capitulo precedente, que na escala septimal ha apenas necessidade de seis palavras para designar as unidades simples *um, dois,... seis ; sete* é a primeira unidade composta, a *septena* ; e dahi por diante vimos que se conta por septenas como por unidades simples, *uma septena duas septenas....*; intercalando sempre entre uma septena e outra os mesmos seis numeros simples. Emfim, com a collecção de sete septenas fórma-se uma unidade de ordem superior, que por analogia com o systema decimal, chamamos centena; denominando tambem *milhar* a collec-

ção de sete centenas; *septena de milhar* a collecção de sete milhares. Portanto, a enunciação dos numeros obedece ás mesmas leis do regimen decimal, tendo apenas em vista o valor septimal da taxa dos agrupamentos.

Para escrever os numeros, sabemos tambem que bastam sete algarismos, inclusive o zero, como se vê na escala acima. Ahi nota-se que a base sete ou uma septena é representada por 10; duas septenas ou duas vezes sete por 20; tres septenas ou tres vezes sete por 30;... seis septenas ou seis vezes sete por 60.

Sete septenas ou sete vezes sete, que formam uma unidade de 3ª ordem a que chamamos centenas, são representadas por 100.

Do mesmo modo sete centenas, collecção a que chamamos *milhar*, e que vale sete vezes sete vezes sete ou quarenta e nove vezes sete (343), estão representadas por 1000 ou milhar; sete milhares ou 343 vezes sete (isto é, 2401) sel-o-hão por 10000; e assim por diante. A similhança do systema decimal, *todo algarismo, escripto á esquerda de outro, exprimirá unidades sete vezes mais fortes*; de modo que um numero qualquer é neste systema, como no decimal, *expresso por uma somma de unidades de differentes ordens successivamente decrescentes, sendo cada uma dellas repetida um numero de vezes menor que a base.*

Assim, 4524 equivale á somma de 4000 com 500 com 20 e com 4 ou a 4 vezes 1000 mais cinco vezes 100 mais 2 vezes 10 e mais 4, isto é, a 4 unidades de 4ª ordem mais 5 de 3ª ordem mais 2 de 2ª e 4 de 1ª.

111.—Assim, pois, si os numeros são representados do mesmo modo nos dois systemas, como em outros quaesquer, é evidente que as *operações* sobre elles serão tambem effectuadas da mesma maneira, uma vez que se tenha em mente que a base do systema de que se trata é a relação constante entre as unidades numericas desse

systema; mas, para que as operações se possam effectuar com facilidade, será indispensavel confiar á memoria os resultados das combinações dos numeros inferiores á mesma base.

As duas tabellas seguintes, construidas de modo analogo ao que se pratica no regimen decimal encerram: a 1ª, as sommas e, portanto as differenças dos numeros inferiores á base septimal; e a 2ª, os productos e, por conseguinte, os quocientes dos mesmos numeros. (10c).

Para obter na 1ª, a somma de dois numeros quaesquer inferiores a sete, procura-se o maior no alto do quadro, na 1ª columna horizontal, e o outro na 1ª columna vertical da esquerda: no cruzamento das duas columnas se achará o resultado.

Assim, tomando os numeros 6 e 5, encontrar-se-ha 14. Reciprocamente, querendo a differença entre 14 e 6, procuramos no quadro os numeros 14 e 6 em uma das columnas verticaes, e encontraremos o resultado 5 no extremo esquerdo da columna horizontal correspondente a 14.

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	31	42
6	6	15	24	33	42	51

Para obter no 2º quadro o *producto* de dois numeros simples quaesquer, procederemos do mesmo modo que no caso da *somma*. Por exemplo o *producto* de 6 por 5 será 42.

(10c) Tive necessidade de descer a esses detalhes, por haver verificado que os alumnos desconheciam a pratica das operações no systema septimal.

Reciprocamente, para obter o *quociente* respectivo, procederemos do mesmo modo que no caso da *differença*.

Assim encontraremos 5 para quociente de 42 por 6.

A ignorancia em que se está dos resultados fornecidos pelos *quadros* acima do systema septimal e da sua respectiva nomenclatura, e pelo contrario, o conhecimento que se tem de uma e outra coisa, relativamente ao systema actual, são as causas pelas quaes não se pódem effectuar no systema de base sete todas as operações com a mesma e até mais facilidade do que no systema decimal.

112. — Sobretudo, tendo em vista a harmonia que deve sempre existir entre o abstracto e o concreto, foi que Augusto Comte, systematisando uma tendencia manifesta desde a infancia da nossa especie, na constituição da *semana*, se pronunciou pela base septimal.

Para sentir assás similhante verdade, basta lembrar o accordo necessario entre a numeração abstracta e a numeração concreta, onde a primeira deve ser systematicamente subordinada á segunda, como a theoria á pratica.

Nada póde melhor verificar a indivisibilidade da verdadeira synthese ou a impossibilidade das systematisações parciaes, do que o memoravel esforço realizado durante a revolução franceza para instituir um *systema universal de medidas decimaes*.

Elaborada com grandes dispendios de todos os generos, e escrupulosamente executada após longos preparativos, essa operação não pôde, entretanto, produzir sinão uma construcção provisoria, por falta de vistas syntheticas.

Sob apparencias systematicas quanto aos detalhes, vê-se que o conjuncto é ahi dominado por uma resolução empirica: Em vez de subordinar todas as divisões de medidas á numeração decimal, seria preciso reconhecer que o abstracto se deve adaptar ao concreto e que portanto aquelle sys-

tema devia ser subordinado á numeração concreta, já adoptada na medida do tempo.

Entretanto, seguiu-se então, passivamente, uma marcha inversa. Dahi o mallogro dessa tentativa, que apenas serviu para facilitar a solução final, preparando-lhe os materiaes; dahi os conflictos que então surgiram, os quaes só podiam ser afastados renovando simultaneamente a numeração abstracta e a numeração concreta.

Foi o que propoz Augusto Comte, cujas reflexões a tal respeito podem ser lidas em sua *Synthese Subjectiva*, capitulo I.

§ ια' (11)

Apreciação geral da numeração concreta

113.—Gradualmente preparada pelas indicações do paragrapho precedente, uma exposição summaria da numeração concreta septimal torna-se agora necessaria para completar a explicação da numeração abstracta, afim de mostrar a possibilidade de uma plena unidade numeral que não existe actualmente.

Antes, porém, precisamos expôr summariamente a numeração concreta usual para que se possa comprehender o alcance da reforma proposta por A. Comte.

As diversas medidas de que a sociedade necessita em nossa epoca, referem-se aos *comprimentos*, ás *superficies*, aos *volumes* ou *capacidades*, aos *angulos* ou *arcos*, aos *pesos*, ás *temperaturas*, ás *moedas*, ao *tempo*, etc.

A cada especie de medida corresponde uma unidade typo, com seus multiplos e submultiplos.

As considerações que presidiam em cada epoca e em cada logar a escolha dessas unidades, eram puramente sub-

(11) Numero *héndeka* (onze).

jectivas e dependiam de circumstancias particulares ao povo que as instituia.

Dahi resultavam graves inconvenientes: Em primeiro logar, si o padrão de uma das unidades se perdia tornava-se impossivel rehavel-o.

E' assim que muitas determinações astronomicas feitas na antiguidade estão actualmente sem valor, em consequencia da impossibilidade de referil-as ás nossas medidas usuaes.

Em segundo logar, as relações commerciaes entre os povos tornavam-se mnito difficeis em consequencia da diversidade das *unidades*, acontecendo que medidas designadas pelos mesmos nomes, tinham valores diversos de uma para outra provincia, e, ás vezes, de uma para outra cidade do mesmo paiz. Em terceiro logar, não se derivavam absolutamente umas das outras; o conhecimento da unidade de comprimento nada indicava sobre a maneira de apreciar os pesos, etc.

Emfim, as relações entre a unidade e seus multiplos ou submultiplos não repousavam sobre nenhuma regra uniforme. Dest'arte, além da difficuldade dos calculos, comprehende-se quanto era sobrecarregada a memoria e como as fraudes podiam ser faceis e frequentes. Esse estado de cousas que subsiste ainda em muitos paizes, havia chamado a attenção dos economistas physiocratas, e Turgot, discipulo destes, propoz que todas as unidades fossem referidas á unidade de comprimento, de accordo com a numeração decimal, e que aquella unidade fosse escolhida em nosso Planeta, de maneira que podesse sempre ser constatada. (11a).

A 26 de março de 1791 a Convenção Nacional, adoptando as vistas essenciaes de Turgot, decidiu que a base do

(11a) Lafitte. — *Calcul Arithmétique.*

novo systema fosse a *decima millionesima parte do quarto do meridiano terrestre*, a que se chamou *metro* (palavra grega que significa medida).

As leis de 1° de agosto de 1793, e de 7 de abril de 1795 estabeleceram logo o novo systema, e esta ultima fixou definitivamente sua nomenclatura. Segundo esta, todas as medidas de comprimento, superficie, volume, peso e etc., derivam do metro; e os multiplos de cada especie de medida exprimem-se antepondo ao nome da unidade principal respectiva os prefixos gregos *deca*, *hecto*, *kilo*, *myria*, que significam *dez*, *cem*, *mil*, *dez mil*; e os submultiplos antepondo-lhes os prefixos latinos *deci*, *centi*, *milli*, que significam a decima, a centesima e a millesima partes.

Vê-se, portanto, que as unidades auxiliares, multiplas e submultiplas, são respectivamente de dez em dez vezes maiores, e de dez em dez menores do que a unidade principal; de modo que as relações entre esta e aquellas ficaram subordinadas á lei da numeração decimal.

As operações necessarias á determinação da medida fundamental, foram confiadas a Delambre e Mèchain que, após sete annos de rigorosos trabalhos, na medição do arco de meridiano comprehendido entre os parallelos de Dunkerque e Barcelona, concluiram que o quadrante terrestre que passa por Paris ou a distancia do Equador ao Pólo Norte, era de

TOESAS	PÉS	POL.	L.
5130740	4	5	4.

114. — REFORMA NAS MEDIDAS DE COMPRIMENTO, SUPERFICIE E VOLUME. — Os Commissarios da Academia de Sciencias, encarregados da organização do *Systema metrico decimal*, deliberaram então dividir aquella distancia em dez milhões de partes iguaes, e tomar uma dellas para base do mesmo systema e para *unidade principal das medidas de comprimento*. (11b).

(11b) Para evitar que se alterasse a medida fundamental, o governo francez mandou construir um *metro padrão* de platina na temperatura do

Sob este ultimo aspecto, tal unidade, isto é, o *metro* teve como multiplos o *decametro* ou dez metros, o *hectometro* ou cem metros, o *kilometro* ou mil metros, e o *myriametro* ou dez mil metros ; e como submultiplos o *decimetro* equivalente á decima parte do metro, o *centimetro* equivalendo á centesima parte, e o *millimetro* á millesima parte do metro.

Para unidade de *superficie* adoptou-se o *quadrado* tendo para lado o comprimento do metro, isto é, o *metro quadrado*; de modo que este se compõe de cem *decimetros quadrados*, tendo cada um destes cem *centimetros quadrados*, e cada *centimetro quadrado* equivalendo a cem *millimetros quadrados*. (11c). Os multiplos do metro quadrado foram formados segundo a mesma regra adoptada para as unidades de comprimento, isto é, antepondo ao *metro quadrado* os prefixos gregos *deca*, *hecto*, *kilo* e *myria*, o que produziu o *decametro quadrado* com cem metros quadrados, o *hectometro qurdrado* com cem decametros quadrades, o *kilometro quadrado* com cem hectometros quadrados e o *myriametro quadrado* com cem kilometros quadrados.

Do mesmo modo que para as grandes superficies se emprega o *kilometro quadrado* como unidade principal, assim tambem o *decametro quadrado* é usado nas superficies de dimensões médias, ordinariamente nas superficies *agrarias*, sob o nome de *are*. (11d).

Os multiplos e submultiplos do *are* são subordinados á mesma regra decimal: Assim o *hectare* vale cem *ares*,

---

gelo, que foi cuidadosamente guardado. Além disso estabeleceu-se a relação entre o comprimento do metro e o do pendulo que bate segundos no Observatorio de Paris.

(11c) O professor traçará um quadrado e depois de dividir a base e a altura em 10 partes iguaes, tirará, pelos pontos de divisão de uma, rectas parallelas á outra, afim de mostrar que a figura fica effectivamente decomposta em 100 pequenos quadrados ou *decimetros quadrados*.

(11d) *Are*, do latim *area*.

e o are tem cem *centiares*; de modo que um *centiare* ou a centesima parte do are é igual a um metro quadrado.

Para typo das unidades de volume foi adoptado o *cubo*, tendo para aresta o comprimento do metro, isto é, tendo para base o metro quadrado e para altura áquelle comprimento. Esta unidade foi chamada *metro cubico*; e, antepondo-lhe como nas precedentes, os prefixos latinos *deci*, *centi*, *milli* e os gregos *deca*, *hecto*, *kilo* e *myria*, obtem-se os nomes dos seus submultiplos e multiplos.

Assim forma-se o *decimetro cubico*, equivalente á millesima parte do metro cubico; o *centimetro cubico*, equivalente á millesima parte do decimetro cubico e o *millimetro cubico*, equivalente á millesima parte do centimetro cubico. (11e).

Os multiplos do metro cubico não são geralmente usados. O metro cubico toma o nome de stereo (11f) quando empregado para medir o volume de lenha ou madeira; apparecendo então como multiplos e submultiplos mais usados—o *decastereo* ou dez estereos, o *decistereo* ou a decima parte do estereo — e o *centistereo* ou a centesima parte.

Para typo das unidades de capacidade foi adoptado o *litro* (11g) que é a capacidade de um decimetro cubico. Applicando-se-lhe as mesmas regras, formam-se os seus multiplos, *decalitro* ou dez litros, *hectolitro* ou cem litros e etc.; e seus submultiplos, o *decilitro* ou a decima parte do litro, o *centilitro* ou a centesima parte do litro, e etc.

(11e) O professor traçará um *cubo* e dividindo a base como no *quadrado* e a altura em 10 partes iguaes, tirará, pelos pontos de divisão desta ultima, planos parallelos áquella; conduzindo do mesmo modo, pelas linhas traçadas na base, planos parallelos às alturas, assim mostrará que o cubo fica effectivamente decomposto em 1000 pequenos cubos ou *decimetros cubicos*.

(11f) *Stereo* ou *stere* do grego *stereos*, solido.

(11g) Do grego *litron* ou talvez do baixo latim, *litra*, medida de capacidade para liquidos.

118. — A respeito das medidas de peso, escolheu-se para unidade o peso de um centimetro cubico de agua distillada no vacuo e na temperatura de 4 gráos centigrados acima de zero, correspondente a seu maximo de densidade, e sob a pressão barometrica de 76^{cm}.

A esta unidade principal para os pesos, chamou-se *grammo*, (11h) cujos submultiplos são o *decigrammo* ou a decima parte do grammo, o *centigrammo* ou a centesima parte do grammo e o *milligrammo* ou a millesima parte do grammo; e cujos multiplos são o *decagrammo* ou dez grammos, o *hectogrammo* ou cem grammos, o *kilogrammo* ou mil grammos e o *myriagrammo* ou dez mil grammos.

Por analogia com o antigo systema de pesos e medidas, usado entre nós, empregam-se tambem como multiplos o *quintal* metrico com cem kilogrammos, e a *tonelada metrica* com mil kilogrammos. De modo que o kilogrammo figura assim como a unidade principal a que são referidos os grandes pesos, como acontece com o *kilometro quadrado* e o *kilometro* em relação ás grandes superficies e aos grandes comprimentos (medidas itinerarias).

119. — MOEDAS : UNIDADE MONETARIA. — Para as moedas adoptou-se como unidade principal o *franco*, isto é, uma *peça* composta de novecentas e cincoenta partes de prata e cincoenta de cobre, pesando ao todo cinco grammos.

Não se usa das palavras *decifranco*, etc., nem *decafranco*, etc., diz-se simplesmente *decimo*, *centimo* (moeda de cobre); e dez francos, vinte francos e cem francos (moeda de ouro).

120. — MEDIDAS DE TEMPERATURA. — Para as temperaturas foi dividido em cem gráos thermometricos o intervallo entre a temperatura do gelo (zero) e a da agua em ebulição,

---

(11h) Que em grego significa *peso* (gramma).

sendo os gráos divididos em decimos, e podendo a mesma divisão estender-se em sentido contrario (abaixo de zero).

A reforma feita na maneira de medir a circumferencia do circulo (em 400 grados, cada grado em 100 minutos e cada minuto em 100 segundos) foi abandonada, continuando a prevalecer a divisão sexagesimal, em 360 gráos, cada gráo com 60 minutos e cada minuto com 60 segundos, a qual nos veiu dos Chaldeus que assim a tinham instituido por analogia com a marcha do Sol. Para elles o anno era dividido em 360 dias; e os Chinezes, cujo anno comprehende 365 dias e um quarto, dividiram o circulo em 365 gráos e um quarto.

121.— O systema decimal conservou o dia como unidade de tempo, dividindo-o porém em 10 horas, cada hora em 100 minutos e cada minuto em 100 segundos. O anno foi constituido de 12 mezes com 30 dias cada um, sendo os cinco restantes ou complementares ajuntados no fim do anno. (111).

Emfim o mez foi dividido em tres *décadas*.

Vê-se, portanto, que, além da desharmonia entre as medidas acima e a do circulo, a numeração concreta usual offerece o incoherente espectaculo da coexistencia das duas bases *dez* e *sete*; por isso que esta ultima continuou a vigorar na contagem usual dos dias (*semana*), apezar da reforma ter augmentado de tres este agrupamento, creando a *década*.

122.— SOLUÇÃO FINAL DA QUESTÃO. — Foi para fazer desapparecer similhante incoherencia que A. Comte, mantendo a base septimal no conjuncto da numeração, instituio nos seguintes termos a numeração concreta: «Segundo os habitos consagrados pela reforma decimal, posso essencialmente reduzir esta indicação ás medidas lineares, tanto circulares como rectilineas.

(111) Os annos se contavam a partir de 21 de Setembro de 1792; data da decretação da Republica (éra republicana).

E' mister a principio ligal-as entre si, aperfeiçoando a relação actual entre o módulo fundamental e a circumferencia terrestre, conforme a preferencia universal que merecem os numeros *primos*. Eis como fui levado a dividir o quarto do meridiano terrestre em um numero de partes igual ao producto dos sete menores factores primos, todos elevados sómente á primeira potencia, salvo o segundo e o quinto que se acham cubados.

Uma tal divisão fornece um módulo rectilineo maior do que o metro francez, e quasi equivalente aos seis setimos da antiga *toesa*.

Sem me occupar aqui de uma nomenclatura reservada ao meu volume final (Systema de Industria Positiva que a morte prematura de A. Comte não permittiu que escrevesse), limito-me a esta definição que, segundo as indicações seguintes, permittirá ligar ao planeta humano todas as nossas medidas lineares, e, desde então, suas derivações quaesquer.

E' preciso, deste *módulo* fazer directamente emanar seis outras unidades de comprimento, tres acima e tres abaixo, multiplicando ou dividindo por quatorze para passar de cada uma á seguinte.

Segundo esta regra serão formadas as sete unidades respectivamente proprias, ás áreas, aos volumes e mesmo aos pesos, quando o centro de cada grupo fôr convenientemente derivado segundo as leis geometricas, da base linear, ou de seus annexos normaes. Deve-se em seguida conceber o dia composto de vinte e oito horas, cada uma das quaes comprehende cincoenta e seis minutos, similhantemente divididos.

(A. Comte admitte a *semana* ou o grupo de sete dias, o *mez* de quatro semanas, e o anno de treze mezes com um dia complementar, ou com dois, si é bissexto). (11j).

(11j) Cada mez começa sempre em uma segunda-feira (lunedia) e a *éra* é a Revolução Franceza (1789).

O quarto do circulo, que deve ser astronomicamente dividido como o tempo, compõe-se de noventa e seis gráos, formados cada um de cincoenta e seis minutos similhantemente decompostos. Extendida até o thermometro, a numeração concreta faz ainda prevalecer ahi os factores primos, attribuindo tambem noventa e um gráos ao intervallo comprehendido entre o gelo fundente e a agua fervente.

Estudada em seu conjuncto, esta numeração mostra-se superior á usual.

Para motivar similhante superioridade, basta notar a aptidão da instituição septimal não só em fazer concordar melhor a theoria com a pratica, mas tambem em fundar a unidade numeral aperfeiçoando a harmonia concreta. Poder-se-ha objectar que uma tal numeração é inferior á decimal, pelo facto das unidades de cada especie não serem fracções septimaes umas das outras. Todavia uma tal objecção não tem fundamento porque poderia ser evitada, tomando sete ao envez de quatorze para subordinação mutua das unidades homogeneas. Divididas como se acham, estas unidades tornam-se mais distinctas do que o são no systema decimal, onde a excessiva facilidade de reduzir uma ás outras prejudica a nitidez dos typos, sob pretexto de uma simplificação dos calculos mais apparente do que real, e sobretudo secundaria relativamente ao principal destino da numeração concreta».

....

Scientificamente considerada, a refórma franceza da numeração concreta teve a efficacia de assignalar a questão, preparando-lhe assim a solução definitiva. Esta achava-se de facto esboçada na constituição da semana que, tendo surgido na infancia de nossa especie, foi desde logo consagrada pelo regimen e pelo culto. (11k). Historicamente

(11k) Sanccionada pelo regimen industrial a instituição da semana já havia sido religiosamente consagrada pelo culto, conforme o attesta a lenda

podemos, pois, olhar a instituição septimal como a systematisação final de uma tendencia anterior á instituição decimal. Uma necessidade empiricamente satisfeita comprimiu desde o começo essa disposição fazendo prevalecer uma base muita grande. Todavia, como ao lado desta continuou a subsistir a tendencia primitiva para a outra, de tal coexistencia surgiu afinal o conflicto decisivo que conduziu A. Comte a consagrar o modo inicial.

§ ιβ' (12)

A apreciação dos calculos necessarios para mudar o systema em que os numeros se acham representados.

123.— Admittindo que se venha a substituir o systema actual de numeração, apresenta-se naturalmente a necessidade de mudar os numeros que se acham representados nesse systema, para aquelle em que definitivamente o tiverem de ser.

124.— A' primeira vista concebe-se que similhante problema póde ser resolvido concreta ou abstractamente, mediante simples *contagem*.

Supponhamos, por ex., que se trata de passar o numero 27 escripto no systema decimal para o septimal.

1°. Tendo presente a escala decimal, a questão reduz-se evidentemente a percorrer esta escala de 1 a 27, con-

do Genesis. Com effeito, segundo a Biblia, foi a semana instituida por Deus em memoria da Creação por elle realisada em seis dias, sendo o setimo de repouso, e reservado ao seu culto. Tendo assim instituido o Domingo elle renova á Moysés a sua observancia dizendo-lhe: "Trabalhareis durante seis dias, o setimo é o dia de repouso consagrado ao Senhor vosso Deus" (Velh. Testam.). Mais tarde, no conflicto decisivo entre á *semana* e a *década* vemos tambem o Catholicismo servir de orgão passivo ás activas repugnancias do povo francez contra a constituição decimal.

Emfim, resolvendo esta questão, A. Comte mostra que ella fornece uma brilhante manifestação da preponderancia crescente dos motivos religiosos sobre os impulsos theoricos e mesmo praticos. (V. Synth, Subj. pags. 131 e 132).

(12) Numero *dódeka* (doze).

tando porém no systema septimal. O numero a que assim chegarmos, correspondente a 27, será o procurado; dizemos pois um, dois, tres, quatro,... sete, sete e um, sete e dois... sete e seis, vinte, vinte e um, vinte e dois,... vinte e seis, trinta, trinta e um, trinta e dois,... trinta e cinco, trinta e seis, que sendo o numero correspondente a 27 da escala decimal, é o procurado.

2°. Tendo presente a escala septimal, o problema poderia tambem ser resolvido percorrendo-a em ordem ascendente, mas fazendo a contagem no systema decimal até o numero 27 desta escala.

Assim procedendo, chegaremos ao numero 36, achado precedentemente. Reciprocamente se, como meio de verificação, quizessemos achar no systema decimal o numero correspondente a 36 da escala septimal, chegariamos de um ou de outro modo ao numero 27 do systema decimal. Comprehende-se, porém, que similhante processo, embora logicamente possivel, se tornaria impraticavel quando o numero dado fosse um tanto consideravel.

Deixando, pois, de lado a *contagem*, vejamos como o problema póde ser resolvido pelo *calculo*.

125.—MUDANÇA SERVINDO-SE DA ADDICÇÃO.—1°. Supponhamos a principio que o calculo seja feito no systema septimal e procuremos passar para elle o mesmo numero decimal 27.

Este, compondo-se de duas unidades de segunda ordem e sete de primeira, a questão reduz-se a saber qual o valor que tem no systema septimal uma unidade de segunda ordem do decimal; porque desde então bastará sommar este resultado comsigo mesmo e addiccionar-lhe as sete unidades simples.

Ora, a simples contagem nos mostrando que 10 no systema decimal equivale a 13 no septimal, chegaremos ao numero pedido addiccionando 13 com 13 e ao resultado obtido juntando 10, (equivalente a 7), o que dá 36.

Tomemos ainda o numero decimal 152. Compondo-se este de 1 unidade de terceira ordem, 5 de segunda e 2 de primeira, é evidente que para passal-o para o systema septimal bastará conhecer neste o valor de cada uma destas collecções e addiccionar os resultados assim obtidos.

Ora, a comparação das duas escalas deixa vêr que 2 decimal equivale a 2 septimal; que 50 ou 49 mais um no systema decimal equivalem a 100 mais 1 ou 101 no septimal; que, finalmente 100 ou a somma de 10 parcellas iguaes a 10 no systema decimal, equivalem no septimal á somma de 13 parcellas iguaes a 13, ou á somma de 10 e á de 3 parcellas iguaes a 13.

Fazendo, pois, no systema septimal a somma de todos esses resultados, obteremos o numero procurado, isto é, 305.

Typo do calculo:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 101 \\ 130 \\ 13 \\ 13 \\ 13 \\ \hline 305 \end{array}$$

Neste exemplo as unidades successivas foram determinadas em ordem ascendente, ao inverso da marcha que seguimos no exemplo precedente.

2°. Procuremos os mesmos resultados fazendo as addicções no systema decimal.

Seja ainda o numero decimal 27 e vejamos qual o seu equivalente no systema septimal.

Por isso que uma unidade de segunda ordem do systema septimal equivale a 7 do decimal, a questão reduz-se evidentemente a sommar 7 comsigo mesmo tantas vezes, quantas sejam precisas para perfazer 27, ou o numero inferior de uma quantidade menor do que 7; porquanto a totalidade das parcellas representará o numero de uni-

dades de segunda ordem do systema septimal que formam o numero decimal dado. Assim procedendo tomaremos 7 mais 7 mais 7 ou 21, que correspondem portanto a 30 no systema septimal.

Ajuntando-lhe as seis unidades que ainda faltam para perfazer 27 obteremos finalmente o numero 36. Seja ainda o numero decimal 152. Tendo elle unidades de primeira, segunda e terceira ordem, concebe-se desde logo que o numero septimal procurado terá pelo menos unidades de terceira ordem, por isso a que base septimal é menor do que a decimal.

Ora, a comparação das duas escalas nos mostrando que 49 equivale a uma unidade de terceira ordem septimal, é evidente que sommando 49 comsigo mesmo até obter 152, ou um numero inferior de uma quantidade menor do que 49, a totalidade das parcellas representará a de unidades de terceira ordem septimaes que se acham no numero proposto. Assim procedendo, sommaremos 49 a 49 e o resultado ainda a 49, o que dá 147; e como 3 são as parcellas, 3 serão as unidades de terceira ordem septimaes, que valem 300 de primeira.

Addiccionando a estas, as 5 que ainda faltam a 147 para produzir 152, obteremos 305, que é o numero septimal procurado, onde o zero indica que não ha unidades de segunda ordem.

Supponhamos agora, como meio de verificação, que se trata de passar pelo mesmo processo o numero 36, escripto no systema septimal, para o decimal, fazendo os calculos no systema em que o numero se acha escripto.

Attendendo a que uma unidade de segunda ordem do systema decimal equivale a 13 unidades simples do septimal, a questão reduz-se evidentemente a addiccionar 13 comsigo mesmo tantas vezes quantas sejam precisas para que o resultado attinja a 36, ou pelo menos a um numero inferior de uma quantidade menor que 13.

O numero de parcellas representará assim o conjuncto das unidades de segunda ordem do numero decimal procurado; e para obter as unidades de primeira ordem, bastará addicionar-lhes as que faltarem áquella somma para perfazer 36.

Assim procedendo, addiccionamos 13 á 13 o que dá 26, correspondendo este resultado a 20 no systema decimal; e como á 26 são ainda precisas 10 unidades para obter as 36 do systema septimal, concluimos que sete é o numero que deve ser addiccionado á 20 para chegar-se ao resultado pedido, isto é 27. Seja ainda o numero septimal 305. Attendendo a que uma unidade de terceira ordem decimal contém 10 de segunda e que uma destas vale 13 de primeira no systema septimal, é claro que teremos o valor daquella neste systema fazendo a somma de 13 parcellas iguaes a 13, o que dá 202.

O numero 305 não podendo conter mais de uma parcella igual a 202, isso mostra que o numero decimal procurado só possue uma unidade de terceira ordem.

Para obter as de segunda, bastará evidentemente addiccionar 13 á 202, tantas vezes quanto forem precisas para perfazer 305, ou um numero que lhe seja inferior de uma quantidade menor do que 13; o numero de parcellas representará o de unidades de segunda ordem procuradas. Ora, como são precisas 5 addicções successivas, concluimos que 5 é o numero de unidades de segunda ordem. A' somma obtida 303 é preciso addiccionar ainda 2 unidades para perfazer o numero dado.

Isso nos mostra, emfim, que 2 representa as unidades de primeira ordem do numero procurado. Este se compõe, portanto, de 1 unidade de terceira ordem, 5 de segunda e 2 de primeira.

Procuremos agora chegar ao mesmo resultado fazendo os calculos no systema decimal, para o qual vamos passar o citado numero septimal 36.

Por isso que uma unidade de segunda ordem do systema em que o numero se acha escripto equivale a sete unidades simples do decimal, e attendendo a que o mesmo numero contém apenas 3 unidades de segunda ordem e 6 de primeira, é obvio que a questão será resolvida procurando a somma de 3 parcellas iguaes a 7 e addicionando 6 ao resultado, o que conduz ao numero decimal 27. Seja ainda o numero 305. Uma unidade de terceira ordem septimal valendo 7 vezes 7 ou 49 de primeira no systema decimal, é evidente que obteremos neste systema o valor das 3 que figuram no numero proposto sommando 3 parcellas iguaes a 49, o que dá 147.

Emfim, não havendo ali unidades de segunda ordem, só nos resta addicionar a 147 as 5 de primeira para obter o numero procurado, que é, portanto, 152.

126.— A MUDANÇA SERVINDO-SE DA SUBTRACÇÃO.— Seja ainda o numero decimal 27 e procuremos o septimal equivalente. Fazendo os calculos no systema em que o numero se acha escripto, bastará observar que uma unidade de segunda ordem do systema definitivo equivale a 7 unidades simples do primitivo e que, portanto, o numero procurado deverá conter tantas unidades de segunda ordem quantas vezes fôr possivel subtrahir 7 de 27, sendo que o resto da ultima subtracção representará as unidades de primeira ordem do mesmo numero. Ora, de 27 sendo possivel subtrahir 7 tres vezes com o resto 6, é obvio que o numero procurado será 36. Seja ainda o numero decimal 152 que se quer passar para o systema septimal.

Como neste systema a unidade de terceira ordem equivale a 49 do decimal, é evidente que o numero procurado conterá tantas unidades de terceira ordem quantas vezes fôr possivel subtrahir 49 de 152. Ora, sendo possivel fazer 3 subtracções successivas com o resto 5, menor do que 14, concluimos que o numero procurado compor-

se-ha de 3 unidades septimaes de terceira ordem e 5 de primeira, não tendo nenhuma de segunda; será então representado por 305.

Como meio de verificação, empreguemos agora o mesmo processo para passar o numero septimal 36, para o systema decimal.

Ora, uma unidade de segunda ordem decimal valendo 13 de primeira septimaes, o numero dado compor-se-ha de tantas unidades de segunda ordem quantas vezes pudermos delle subtrahir 13; e o resto representará suas unidades de primeira ordem. Desse modo, subtrahiremos 13 duas vezes de 36 e como o resto é 10, que equivale a 7 unidades decimaes, o resultado será 27.

Seja ainda o numero septimal 305. Uma unidade de terceira ordem decimal sendo igual a 49 mais 49 e mais 2, concluimos que ella valerá 2 unidades de terceira ordem e 2 de primeira do systema septimal, isto é, 202. Assim, pois, o numero procurado compor-se-ha de tantas unidades de terceira ordem quantas vezes pudermos subtrahir 202 do numero dado; e o resto representará unidades de segunda ordem si fôr 13, e unidades de primeira si fôr inferior a esse numero (que corresponde a 10).

Como podemos subtrahir 202 de 305 uma só vez, isto mostra haver uma unica unidade de terceira ordem no numero procurado; sendo que o resto 103 deverá conter as unidades de segunda e primeira ordens.

Como porém, uma unidade de segunda ordem decimal equivale a 13 septimaes de primeira, é claro que o numero procurado conterá tantas unidades de segunda ordem, quantas vezes podermos subtrahir 13 de 103.

Sendo possiveis 5 subtracções com o resto 2, concluimos que o numero pedido terá ainda 5 unidades de segunda ordem e 2 de primeira. Será, pois, 152.

130.— MUDANÇA SERVINDO-SE DA MULTIPLICAÇÃO.— Os processos precedentes, embora logicamente possiveis, tornar-se-hiam extremamente morosos desde que os numeros dados fossem um tanto consideraveis. Por isso, vejamos um outro meio fundado na multiplicação.

1°. Supponhamos que o calculo seja feito no systema septimal para o qual se trata de passar o numero decimal 27. A questão reduz-se a exprimir naquelle systema as 2 unidades de 2ª ordem e as 7 de 1ª de que o mesmo numero se compõe. Ora, uma unidade de 2ª ordem decimal valendo 13 unidades simples do systema septimal, duas valerão duas vezes 13 ou 26. Como, porém, as 7 unidades que ainda restam valem 10 septimaes, deveremos addiccionar 10 a 26 para termos o resultado, isto é, 36.

Vê-se, pois, que tudo se reduziu a multiplicar as unidades de ordem mais elevada pela base a adoptar e addiccionar ao resultado as unidades de ordem immediata, exprimindo os algarismos respectivos e operando sobre elles pelo modo usado no outro systema.

Supponhamos ainda, que se trata de passar para o systema septimal o numero decimal 1569. Raciocinando do mesmo modo, vemos que 1 unidade de 4ª ordem vale 13 de 3ª que, addiccionadas ás 5 seguintes, perfazem 21; mas 21 unidades de 3ª ordem valem 21 vezes 13 ou 303 de 2ª, as quaes, addiccionadas ás 6 ali existentes, perfazem 312; emfim, 312 unidades de 2ª equivalem a 312 vezes 13 ou 4356 de 1ª que, addiccionadas ás unidades desta ordem, formarão a totalidade das que compõem o numero dado.

Ora, as 9 ahi existentes equivalendo a 12 no systema septimal, é claro que obteremos o numero procurado nesse systema, addiccionando 12 a 4356, o que dá 4401.

2°. Temos determinado as unidades successivas em ordem descendente.

Comprehende-se, porém, que podemos fazel-o em ordem ascendente, embora o calculo não se torne tão expedito.

E' assim que, tomando o mesmo numero 1569, o transportaremos tambem para o systema septimal observando :

Que 9 equivale a 7 mais 2, isto é, a 10 mais 2 ou... .. 12;

que 60 equivale a 6 vezes 10 ou 6 vezes 13, o que produz...... 114;

que 500 equivalem a 5 vezes 100 ou 5 vezes 13 vezes 13 ou 101 vezes 13 ou... 1313; e, finalmente, que 1000 equivale á 3ª potencia de 13, ou 202 vezes 13... 2626.

Sommando estes resultados obteremos 4401, numero já achado.

Admittamos ainda que, como meio de verificação, trata-se de passar o numero septimal 4401 para o systema decimal. Fazendo os calculos neste systema e adoptando o processo precedente (1°), vemos que 4 unidades de 4ª ordem do systema septimal valem 4 vezes 7 ou 28 de 3ª, as quaes reunidas ás 4 existentes perfazem 32; mas 32 unidades de 3ª valem 32 vezes 7, ou 224 de 2ª, as quaes equivalem por sua vez a 224 vezes 7 ou 1568 de 1ª; reunindo a estas a unidade 1 que ali existe, obteremos as 1569 unidades simples que compõem o numero procurado no systema decimal.

Emfim, como exercicio e para constatar a generalidade deste processo, vamos passar o numero septimal 4401 para o systema duodecimal.

As multiplicações, tendo de ser feitas neste systema, tornar-se-ha preciso construir um quadro similhante ao que fizemos para o systema septimal, afim de conhecer os productos dos numeros inferiores a 12.

Podemos, porém, supprir similhante lacuna, observando que na escala duodecimal as potencias decimaes de 12, isto

é, 12, 144, 1728, 20736,.... são respectivamente representadas pelas unidades de 2^a, 3^a, 4^a, 5^a,.... ordens, isto é, por 10, 100, 1000, 10000,... ; e que portanto, o multiplo 2 vezes 12 será 20, 3 vezes 12, 30, 4 vezes 12, 40 etc ; assim como 2 vezes 12 vezes 12 ou 2 vezes 144 será 200, 3 vezes 144, 300, etc. ; e tambem que 2 vezes 12 na 3^a potencia ou 2 vezes 1728 será 2000, 3 vezes 1728, 3000 e assim por diante. Desse modo será facil por um simples calculo mental formar os productos comprehendidos nestes e realizar as multiplicações de que vamos precisar no systema duodecimal. Ora, no numero septimal dado as 4 unidades de 4^a ordem valem 4 vezes 7 ou 24 no systema duodecimal, addiccionando-lhes as 4 que ainda ali existem, obteremos 28 ; mas 28 unidades de 3^a ordem valem 28 vezes 7 ou 168 de 2^a, as quaes por seu turno equivalem a 168 vezes 7 ou *aa8* de 1^a ; emfim, juntando a estas 1 unidade da mesma especie que ainda ali existe, obteremos as *aa9* que compõe o numero procurado no systema duodecimal.

Podemos agora verificar os calculos, passando o numero *aa9* para o systema septimal, o que deverá produzir 4401. Como, porém, sabemos que este numero é equivalente a 1569 do systema decimal, será mais facil passar aquelle para tal systema.

Isto facilmente obtem-se, seguindo a marcha descendente, multiplicando *a* (10) por 12, sommando *a* ao resultado, o que dá 130 ; emfim multiplicando 130 por 12 e addiccionando 9 ao resultado, o que tudo produz 1569.

Os exemplos acima nos permittem, emfim, formular a seguinte regra da operação relativa a este processo:

Para passar um numero de um systema de numeração para outro, multiplica-se o algarismo das mais altas unidades pela base do systema primitivo, e somma-se ao producto o algarismo seguinte ; multiplica-se ainda o resultado pela mesma base, somma-se ao producto o algarismo se-

guinte e assim procede-se até o algarismo das mais fracas unidades, tendo o cuidado de praticar os calculos e exprimir os seus resultados no systema definitivo.

131. — O EMPREGO DA DIVISÃO PARA MUDAR O SYSTEMA EM QUE OS NUMEROS SE ACHAM ESCRIPTOS. — Tomemos o numero decimal 13654 e procuremos escrevel-o no systema septimal empregando a divisão.

Um numero qualquer deste systema sendo sempre formado pela somma de potencias successivas da base, cada uma repetida um numero de vezes inferior a 7, a questão reduz-se a determinar successivamente as potencias de 7 que se acham contidas no numero dado; porque assim ficarão conhecidas as novas unidades septimaes de diversas ordens. Ha duas maneiras de proceder, conforme se começa a determinar successivamente as diversas unidades septimaes do numero, pelas mais elevadas, ou pelas mais fracas.

1°. No primeiro caso o problema consiste em procurar a principio qual a mais alta potencia de 7 contida no numero dado; em seguida quantas vezes ella é ahi contida, o que nos fornecerá as unidades de ordem mais elevada do numero procurado.

Para isso é indispensavel formar as 1as potencias de 7, a saber: 7, 49, 343, 2401, 16817, e etc., que correspondem respectivamente ás unidades septimaes de 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, etc., ordens.

Isso posto, o numero 13654 estando comprehendido entre as 4a e 5a potencias de 7, (isto é entre 2401 e 16807), é claro que lhe conterá tantas unidades septimaes de 5a ordem quantas vezes 2401 se contiver nelle. Dividindo 13654 por 2401, vê-se que contém 5 unidades septimaes de 5a ordem (ou 5 vezes 2401) e mais 1649 unidades das ordens inferiores áquella.

Dividindo, pois, 1649 por 343, que é a 3a potencia de 7, obteremos tambem as unidades de 4a ordem que o mesmo numero encerra.

Feita a operação, encontramos o quociente 4 e o resto 277 ; o que significa ter o numero dado, além das 5 unidades de 5ª ordem, 4 de 4ª e mais 277 de 3ª, 2ª e 1ª ordem septimaes. Para determinar o numero de suas unidades de 3ª ordem, dividiremos similhantemente 277 por 49, 2ª potencia de 7, o que dá para quociente 5 e para resto 32.

O numero dado contém, pois, 5 unidades de 5ª ordem, 4 de 4ª ordem, 5 de 3ª e mais 32 de 2ª e 1ª ordens.

Portanto para determinar estas ultimas, bastará dividir 32 por 7, o que nos mostra finalmente conter elle 4 unidades de 2ª ordem e 4 de 1ª.

O numero procurado é por conseguinte 54544.

2°. O processo precedente, apezar de sua simplicidade theorica, torna-se complicado na pratica por exigir a penosa formação das potencias successivas de 7.

Para evitar similhante inconveniente, póde-se empregar um outro que consiste, ao inverso do precedente, em determinar as unidades septimaes começando pelas mais fracas. Tomando o mesmo numero decimal 13654, é obvio que elle conterá tantas unidades septimaes de 2ª ordem, quantas vezes contiver o numero 7. Dividindo, pois, 13654 por 7, o quociente representará essas unidades de 2ª ordem *e o resto dará as unidades simples.*

Feita a operação, acharemos 1950 para quociente e 4 para resto. Mas as 1950 unidades de 2ª ordem conterão por sua vez tantas unidades de 3ª ordem qnantas vezes contiverem o numero 7.

Dividindo, pois, 1950 por 7, o quociente representará unidades de 3ª ordem, e o resto, *as de 2ª do numero septimal procurado.*

Feito o calculo, encontraremos 278 para quociente e 4 para resto.

Porém as 278 unidades de 3ª ordem conterão tantas de 4ª ordem, quantas vezes contiverem o numero 7. Divi-

dindo, pois, 278 por 7, o quociente representará unidades de 4ª ordem, e o resto, *as de 3ª do numero procurado.*

Feita a operação, acharemos 39 para quociente e 5 para resto.

Mas, por sua vez, as 39 unidades de 4ª ordem conterão tantas de 5ª, quantas vezes o numero 7 se contiver nellas. Dividindo, portanto, 39 por 7, *o quociente representará as unidades de 5ª ordem e o resto as de 4ª ordem do numero septimal procurado* : o quociente sendo 5 e o resto 4, vê-se que ha 4 unidades de 4ª e 5 de 5ª ordens. Resumindo, pois, os resultados precedentes, concluimos que o numero procurado compõe-se de 5 unidades de 5ª ordem, 4 de 4ª, 5 de 3ª, 4 de 2ª e 4 de 1ª, será, pois, 54544, o que está de accordo com o resultado do 1º processo.

Eis o typo do calculo:

```
13654 |7
 66   |1950 |7
  35    55  |278 |7
   0     60   68 |39 |7
   4      4    5   4 |5
```

Ainda como meio de verificação deste resultado, vamos pelo mesmo processo passar o numero septimal 54544 para o systema decimal.

A base decimal equivalendo a 13 no systema septimal, a questão reduz-se similhantemente a dividir 54544 por 13, o quociente obtido ainda por 13 e proceder do mesmo modo com os quocientes que forem sendo obtidos, até encontrar um menor do que 13; devendo, porém, todas estas operações serem praticadas no systema septimal.

O ultimo quociente representará as unidades de ordem mais elevada do numero decimal procurado; o resto respectivo, as unidades de ordem immediatamente inferior; sendo

as seguintes representadas pelos demais restos tomados em ordem inversa áquella em que foram obtidos.

Eis o typo do calculo :

```
54544 | 13
125   | 3660 | 13
 114    106  | 253 | 13
   4    50     123 | 16 | 13
         5       6    3 | 1
```

Tomando o ultimo quociente e os restos em sentido inverso, achamos o numero já obtido 13654.

Emfim, como exercicio e para constatar a generalidade do processo, vamos passar o numero duodecimal *aa9* para o systema septimal. Eis o typo do calculo no systema duodecimal :

```
aa9 | 7
3a  | 168 | 7
 49    48 | 28 | 7
  1     0    4 | 4
```

Tomando o ultimo quociente, bem como os restos em sentido inverso áquelle em que foram obtidos, chega-se ao numero procurado 4401.

Applicando a mesma marcha para passar 2205 do systema septimal para o binario, obtem-se 1100010101.

O que fica exposto permitte-nos construir a seguinte regra pratica da operação, relativa a este processo : *Para passar um numero de um systema de numeração para outro, basta dividil-o pela nova base ; dividir ainda o quociente obtido pela mesma base e assim successivamente até obter um quociente menor do que ella. Este quociente e bem assim os restos, tomados em ordem inversa áquella em que forem obtidos, exprimirão os algarismos do numero procurado, desde que os calculos sejam feitos no systema do numero dado.*

132. — SOLUÇÃO QUE CONVÊM ADOPTAR, CONFORME O CASO CONSIDERADO. — As considerações feitas nas secções precedentes, nos mostram que a solução abstracta da presente questão depende: 1° do systema em se quer fazer os calculos; 2° dos calculos que se pretende realisar; 3° da ordem segundo a qual se quer determinar as unidades successivas. Aprofundando mais similhante apreciação, podemos concluir: 1° que, embora os processos expostos sejam todos inteiramente geraes, os da multiplicação e divisão tornam-se scientificamente os mais importantes, por serem os unicos praticaveis em todos os casos; 2° que o processo pela multiplicação não é mais do que uma abreviação do 1° *modo* do processo pela addicção, sendo que o processo pela *subtracção* é apenas a inversão do 2° *modo*; 3° que, similhantemente o processo (2°) *pela divisão* não é mais do que uma abreviação do processo *pela subtracção*; 4° que no caso em que se quizer praticar os calculos no systema do numero dado, convirá empregar o 2° processo pela divisão; 5° que no caso em que se quizer praticar os calculos no systema do numero pedido, convirá empregar o 1° processo pela multiplicação; 6° que se poderá tambem praticar os calculos num systema diverso, passando o numero dado para este systema, e dahi para o systema procurado; 7° que, emfim, no caso precedente convirá empregar o processo da multiplicação na primeira passagem, e o da divisão na segunda.

Assim, por ex., querendo passar o numero 1100010101 do systema binario para o septimal, acharemos directamente 2205, já pelo processo da *multiplicação*, já pelo da *divisão*.

Não se estando, porém, familiarisado com as operações respectivas nos systemas septimal e binario, poder-se-ha passar o binario 1100010101 para o systema decimal, pelo processo da *multiplicação*, o que dá 789; e em seguida, pelo da *divisão*, passar este ultimo numero para o systema septimal, o que produzirá do mesmo modo 2205.

O calculo póde ser neste caso abreviado, fazendo mentalmente as multiplicações e sommas antes de cada divisão parcial, como se vê em seguida :

```
1100010101 | 7
 (12)      |__________
   50      | 1110000 | 7
  (10)         (7)   |__________
    31         (0)   | 10000 | 7
    (7)                 (8)  |________
     00101              10   | 10
       (5)              (2)   (2)
```

Os resultados das multiplicações e sommas estão representados pelos numeros entre parenthesis.

CAPITULO V

Theoria numerica da ordem

(Theoria das permutações, arranjos, combinações e repartições)

§ ι γ' (13)

Objecto desta theoria — Solução espontanea e directa dos problemas das permutações, arranjos e combinações

133. — Apreciando precedentemente a numeração, vimos que esta inaugura o estudo da ordem universal sob o ponto de vista mais simples, isto é, sob o ponto de vista da existencia dos seres em relação a nós, ou delles entre si.

Vimos, tambem, que por esse meio é possivel fixar, não só as grandezas continuas, como tambem as descontinuas ou pluralidades. Mas ha aqui uma distincção a fazer: Emquanto aquellas ficam perfeitamente assignaladas, o mesmo não tem lugar com as pluralidades, as quaes conforme dissemos, além de variarem pela proporção dos elementes constituintes, podem tambem variar pela disposição desses elementos. E' assim, por ex., que, modificando a disposição das sete côres, nós obtemos uma infinidade de paineis distinctos, contendo embora as mesmas côres elementares. O mesmo se dá com a escala musical que, tambem fixada subjectivamente em sete sons, póde entretanto dar lugar a uma grande variedade de melodias.

Não basta portanto saber si o grupo é representado pelo mesmo numero de elementos; é preciso examinar tambem si a disposição é a mesma, porque esta póde ter feito variar o grupo que nos interessa conhecer.

---

(13) Numero — *trèskaidcka* ou *triakaideka* (treze).

APEOADA

O exame da diversidade de disposições dos elementos de um grupo exige incontestavelmente:

1°, que se classifique todas as disposições possiveis; 2°, que se determine quantas são essas disposições ou arrumações.

O segundo problema suppõe evidentemente o primeiro, que por sua vez é uma questão de numeração.

Do mesmo modo que a fixação dos grupos depende da classificação ou da ordem em que collocamos os respectivos elementos, assim tambem o conhecimento do numero de disposições que os objectos podem ter, exige que se classifiquem essas disposições.

Classificadas estas, poderemos distinguil-as, ou dando-lhes nomes distinctos como a principio se fez com os termos da escala numerica, ou melhor ainda designando-as pelos nomes dos numeros desta mesma escala.

E' assim que podemos chamar o primeiro agrupamento 1, o segundo 2, o terceiro 3 e assim por deante; de modo que a classificação ordinal fique transformada em cardinal, tal como fizemos na numeração, cuja analogia com este problema é desde então evidente.

O importante é conhecer em todos as hypotheses a lei segundo a qual o numero de arrumações possiveis vai depender, quer do numero de objectos considerados, quer da *taxa de agrupamento;* porque estas disposições podem mudar de modos diversos. No caso das 7 notas musicaes, por ex., a impressão é diversa quando figuram todas as notas, ou quando apenas se acham algumas dellas; mas, num caso como no outro, ainda a impressão é diversa quando uma certa nota está em primeiro lugar, ou em segundo e etc.

No caso das côres, o painel é diverso quando figuram todas as 7 côres ou somente algumas; mas, ainda o é, num ou no outro caso, quando uma das côres estiver á esquerda, ou á direita, etc.

Em qualquer hypothese, a descoberta da lei é feita ou pela *inducção* sómente, ou pela inducção auxiliada pela *deducção*.

Mas, attenta á variedade de marchas que podem ser adoptadas, torna-se necessario introduzir o ponto de vista subjectivo, para effectuar a *construcção* do typo mais conveniente ás nossas necessidades. Assim consideradas, estas leis não podem ser senão as combinações fundamentaes da arithmetica, nas quaes se resolvem todos os casos imaginaveis desta questão. Nada, pois, justifica ser ella estudada no dominio algebrico, como ordinariamente se faz; o facto de exigir o conhecimento pratico das operações fundamentaes, não é motivo para similhante deslocamento.

Porque a passagem de numeros de um systema de numeração para outro exige tambem aquelles conhecimentos e, entretanto, jámais se contestou o caracter puramente arithmetico deste problema.

O estudo pratico das operações é espontaneamente adquirido na educação da primeira infancia, ficando apenas á arithmetica o estudo das respectivas theorias, cujo destino é desde então mais logico do que scientifico.

Emfim, como similhante questão depende essencialmente da numeração, A. Comte manda estudal-a como um complemento essencial desta parte da arithmetica, sob o nome de *theoria numerica da ordem*.

134. — **Podemos** agora iniciar o estudo da theoria numerica da ordem ou, em outras palavras, da theoria numerica das *arrumações*, porque é neste sentido que aqui empregamos a palavra *ordem*.

Estas arrumações ou disposições formam tres categorias, que são respectivamente conhecidas sob os nomes de *permutações*, *arranjos* e *combinações*, dando portanto lugar a tres especies de problemas.

Permutações são as diversas disposições que podem ser dadas a um certo numero de elementos, considerados no seu conjuncto.

Para dar um exemplo, basta considerar as 7 notas da escala musical. Mudando a disposição dessas notas, sem alterar o seu numero, podemos produzir differentes melodias. Cada uma destas representa uma permutação de 7 notas, e as differentes melodias o conjuncto das permutações das 7 notas.

Chamam-se arranjos as differentes disposições que se póde obter com diversos elementos grupando-os dois a dois, tres a tres, quatro a quatro, etc.

No caso das melodias, grupando as notas duas a duas, tres a tres, etc., obtemos diversas composições. Cada uma destas representa um arranjo dois a dois ou tres a tres, etc., das 7 notas; e o conjuncto constitue os arranjos das 7 notas. Os arranjos mudam não só quando as notas grupadas são differentes, mas ainda quando figuram as mesmas notas em ordem invertida.

Chamam-se *combinações differentes*, ou simplesmente *combinações*, as diversas disposições que se póde obter considerando os elementos dois a dois, tres a tres, etc., de modo que cada disposição diffira das outras pelo menos por um dos elementos.

Si tomarmos, por ex., as 7 côres e formarmos diversos paineis de duas côres, tendo o 1° o vermelho e o verde; o 2° o vermelho e o amarello; o 3° o vermelho e o azul,....... e etc.; cada um destes paineis representará uma combinação das 7 côres duas a duas, e os diversos paineis obtidos formarão o conjuncto das combinações duas a duas, que podem ser feitas com aquellas côres. Bem apreciados segundo sua natureza e sua connexidade, estes tres problemas podem ser tratados, ou directamente, considerando cada um em particular como si fosse distincto; ou indirecta-

mente, fazendo recahir dois dentre elles no outro, considerado então como fundamental e distincto. Ha, portanto, seis modos de resolvel-os. No ponto de vista scientifico é indifferente qualquer destas marchas; mas, no ponto de vista logico, o mesmo não acontece. Porque de cada maneira de resolver surge uma observação, uma consequencia logica, que tem mais importancia do que os resultados scientificos; porquanto estes tem apenas utilidade momentanea, ao passo que os outros são incorporados á nossa sabedoria e utilisados em toda a nossa vida. Comprehende-se entretanto, que a solução indirecta é philosophicamente a preferivel, porque encadea e concatena os tres problemas; e nosso espirito é naturalmente levado a estabelecer ligações. Mas, ainda aqui, é preciso distinguir o ponto de vista abstracto do concreto. No ponto de vista concreto, pratico, a solução directa póde ser preferivel; porque a força de querer ligar póde levar-nos a comprometter a simplicidade das questões.

E' preciso, portanto, alliar os dois pontos de vista. E' isso o que vamos fazer, tratando a principio da solução directa, e depois da indirecta, e escolhendo, dentre os modos que esta ultima comporta, o que offerecer mais simplicidade.

135. — ESTUDO DO PROBLEMA DAS PERMUTAÇÕES. — Supponhamos que se trata de saber quantas permutações podem ser feitas com um certo numero de objectos; ou para fixar as ideias, quantas melodias podem ser obtidas com as sete notas musicaes, não levando em conta os rythmos.

Conforme a regra de Descartes, vamos decompor esta questão em outras mais simples.

1°. Tomemos duas notas e representemol-as pelos numeros 1 e 2.

E' evidente, em vista da definição acima, que podemos fazer as permutações representadas por

$$1.2 \text{ e } 2.1$$

Temos portanto duas permutações.

2°. Tomemos agora tres notas, representadas por

1, 2 e 3.

Si fixarmos a primeira nota, e collocarmos em seguida as permutações obtidas com as duas restantes, teremos duas permutações de tres notas que começam pela primeira. Mas, essa operação póde ser repetida para a segunda nota e depois para a terceira, fornecendo de cada vez duas permutações de tres notas.

Assim teremos:

1.2.3	2.1.3	3.1.2
1.3.2	2.3.1	3.2.1

Logo o numero total das melodias fórma tres lotes, contendo cada um dois grupos, ou 3 vezes 2, que é portanto o numero total de permutações que podem ser feitas com 3 elementos.

3°. Consideremos agora quatro notas, representadas por

1, 2, 3 e 4.

Fixando a primeira e notando em seguida as permutações das tres restantes, teremos tantas permutações das 4 notas, quantas foram obtidas com tres, que são como vimos 3 vezes 2. E como esta operação póde ser repetida quatro vezes, o numero total de permutações das quatro notas, será *4 vezes 3 vezes 2*.

Estendendo este raciocinio ao caso de 5, 6,... notas, veremos que o numero de permutações de uma ordem é igual ao de permutações da ordem immediatamente inferior, multiplicado pelo numero de objectos a permutar.

Com 5 notas, por ex., é facil de reconhecer, por um raciocinio analogo, que a totalidade das permutações é

expressa por 5 vezes o numero de permutações de 4 notas, ou 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2.

Com 6 notas, obteriamos 6 vezes o numero de permutações de 5 notas, ou 6 vezes 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2; e finalmente para 7 notas chegariamos a 7 vezes o numero de permutações de 6 notas ou a 7 vezes 6 vezes 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2, que representa portanto o numero de permutações que podem ser feitas com as 7 notas.

Por inducção podemos, portanto, concluir que, para um numero qualquer de objectos, a totalidade das permutações equivale a um producto de factores consecutivos e decrescentes desde esse numero até 2 inclusive.

Mas, desta fórmula deduziu-se uma mais simples, attendendo que a ordem dos factores não altera o producto, o qual tambem não se modifica introduzindo-lhe o factor 1.

Assim, o numero de permutações das 7 notas póde ser expresso mais facilmente por 1 vez 2 vezes 3 vezes 4 vezes 5 vezes 6 vezes 7.

Para o caso de 8 objectos a permutar, este producto comprehenderia ainda o factor 8; para o caso de 9, o factor 9 além do precedente; e assim por deante.

Pode-se, pois, concluir que *« o numero de permutações quaesquer equivale ao producto da escala numerica, até o numero total dos objectos a permutar inclusive»*.

136.— GRUPAMENTO EM ARRANJOS. — O problema consiste em determinar directamente quantos arranjos comporta um certo numero de elementos, por ex., as 7 notas musicaes consideradas 2 a 2, 3 a 3 e etc.

A connexidade deste problema com o precedente torna-se evidente porque, si o numero de objectos a arranjar for igual á taxa de agrupamento, o arranjo obtido será uma permutação.

Portanto, para resolver este problema sigamos ainda a marcha precedente, procurando nos elevar dos casos mais simples aos complexos, confórme a regra de Descartes.

Por isso que a difficuldade do problema depende não do numero de objectos a arranjar, mas dos que devem figurar em cada grupo (taxa de agrupamento), supponhamos, a principio o caso mais simples em que se trata de obter *arranjos 2 a 2.*

Tomando a primeira das 7 notas, é claro que podemos grupal-a com cada uma das seis outras, o que dará seis arranjos 2 a 2, isto é, tantos arranjos 2 a 2, quantas as notas consideradas menos uma. E como a operação póde ser repetida tantas vezes quantas são as notas, fornecendo sempre o mesmo numero 6, concluimos que a totalidade dos arranjos 2 a 2 será igual a 6 repetido tantas vezes quantas as notas consideradas, isto é, a 6 vezes 7.

Representando respectivamente as 7 notas pelos 7 primeiros numeros da escala, teremos para estes, 6 vezes 7 ou 42 arranjos :

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
2,1		3,4	3,5	3,6	3,7
3,1	3,2		4,5	4,6	4,7
4,1	4,2	4,3		5,6	5,7
5,1	5,2	5,3	5,4		6,7
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	
7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6

Do exposto póde-se concluir que « a totalidade dos arranjos 2 a 2 equivale ao producto de dois factores consecutivos dos quaes o maior é o numero de objectos a arranjar».

Esta conclusão, verificando-se qualquer que seja o numero de objectos a arranjar no caso da taxa ser 2, podemos induzir a sua plena generalidade.

Arranjos 3 a 3. Procuremos, por ex., quantas melodias pódem ser obtidas com as 7 notas, 3 a 3.

Fixando a primeira das sete notas, e collocando em seguida os arranjos das 6 seguintes 2 a 2, obteremos tantos arranjos das 7 notas 3 a 3 quantos arranjos que comportam as 6 restantes 2 a 2; isto é, obteremos 6 vezes 5 arranjos.

E como esta operação póde ser repetida tantas vezes quantas as notas consideradas, fornecendo sempre aquelle numero de arranjos, é claro que teremos ao todo um numero de arranjos representado por 7 vezes 6 vezes 5.

Portanto, a totalidade dos arranjos 3 a 3 equivale a um producto de 3 factores consecutivos, dos quaes o maior é o numero dos objectos a arranjar.

Arranjos 4 a 4. Repetindo o mesmo processo, verifica-se que a totalidade dos arranjos 4 a 4 será reprsentada por um producto de 4 factores consecutivos, sendo o maior expresso pelo numero dos objectos considerados. *Por inducção somos, pois, levados a concluir que se obtem « o numero de arranjos quaesquer, formando o producto de uma serie continua de factores decrescentes, a partir da totalidade dos objectos, até que o numero desses factores attinja a taxa de agrupamento »*.

Por ex., o numero de arranjos de 7 objectos 5 a 5 será igual ao producto de cinco factores decrescentes a partir de 7; isto é, a 7 vezes 6 vezes 5 vezes 4 vezes 3 ou 2520.

140.— A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS COMBINAÇÕES. — Vê-se logo uma certa analogia entre este problema e o dos arranjos.

Si tomarmos todos os arranjos que pódem ser feitos com um certo numero de objectos e separarmos aquelles que differirem ao menos por nm dos objectos constituintes, teremos todas as combinações dos objectos considerados. Assim no quadro dos arranjos do numero precedente, si imaginarmos uma linha do grupo 1, 2 para o grupo 7, 6, os 42 arranjos ficarão divididos em duas porções iguaes,

sendo a superior formada pelas *combinações* das sete notas 2 a 2.

Assim se poderia dizer que as combinações não são mais do que arranjos distinctos quanto aos objectos que os compõe. Esta analogia nos leva naturalmente a adoptar aqui a marcha seguida na questão precedente.

Antes, porém, devemos reflectir sobre a palavra *combinação*, que é mais expressiva do que a palavra *arranjo* e que a palavra *permutação*. Com effeito, na primeira syllaba acha-se a idéa de reunião e na segunda a de dois objectos, de modo que uma tal palavra significa etymologicamente *acção de reunir dois objectos ou duas cousas*.

Por esse sentido parece absurdo este problema, porque elle occupa-se da combinação de objectos não só 2 a 2, mas ainda 3 a 3, 4 a 4 e etc.

Isso, porém, não tem lugar ; de facto, toda a combinação é binaria, mas nada impede que ao lado de um, dois, tres, etc., objectos escrevamos uma combinação binaria, e é a isso que chamamos combinações ternarias, quaternarias e assim por deante.

Isso posto, vejamos si a marcha seguida no problema dos arranjos permitte resolver esta questão, que consiste em determinar quantas combinações podem ser feitas com um certo numero de objectos, considerados ou 2 a 2, ou 3 a 3, ou 4 a 4 e etc.

I — Supponhamos que se trata de combinar 7 objectos 2 a 2, os quaes representaremos ainda pelos sete primeiros termos da escala numerica.

Grupando o primeiro objecto com cada um dos seguintes, teremos 6 combinações, a saber: 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7. Passando ao segundo objecto e grupando-o, não com o precedente, porque esta combinação já está fixada, mas com cada um dos cinco seguintes, teremos 5 combinações, isto é, 2,3 2,4 2,5 2,6 2,7.

Passando ao terceiro e grupando-o, não com os dois precedentes, mas com os quatro seguintes, teremos 4 combinações, a saber: 3,4 3,5 3,6 3,7.

Passando ao quarto e grupando-o com os tres seguintes, obteremos 3 combinações, isto é, 4,5 4,6 4,7.

Passando ao quinto e grupando-o com os dois seguintes, obteremos 2 combinações, isto é, 5,6 e 5,7; e finalmente grupando o sexto com o seguinte, teremos 1 combinação, isto é, 6,7. O numero total de combinações dos 7 objectos 2 a 2 é, portanto, representado pela somma dos numeros: 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Raciocinando do mesmo modo para um numero qualquer de objectos, chega-se a conclusão de que a « totalidade de suas combinações duas a duas é expressa por uma somma de parcellas successivamente decrescentes, em que a maior é representada pelo numero de objectos immediatamente inferior ao considerado e a menor é a unidade ».

O enunciado acima não é o mais conveniente. Póde-se construir este outro, deduzido daquelle, mediante a consideração de que a ordem das parcellas não altera a somma: « A totalidade das combinações quaesquer, tomadas duas a duas, equivale a somma dos termos da escala numerica até aquelle cuja ordem é igual ao numero de objectos considerados menos 1. »

A determinação de um numero qualquer de combinações duas a duas fica, pois, reduzida a sommação de uma serie de termos de escala numerica.

Tomando nesta o primeiro, e depois a somma dos dois primeiros, dos tres primeiros, dos quatro primeiros e assim por diante teremos respectivamente os numeros que exprimem a totalidade das combinações duas a duas de 2, de 3, de 4, etc. objectos.

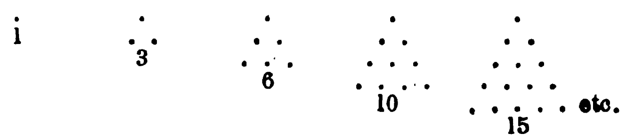
Dahi resulta, pois, a possibilidade de organisar uma

tabella contendo a totalidade das combinações duas a duas de objectos quaesquer, até onde fôr preciso:

Objectos a combinar : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.............
Totalidade das combinações : 1, 3, 6, 10, 15, 21.............

Para um numero qualquer de objectos representado na 1ª fila, acha-se na 2ª immediatamente abaixo, a totalidade das combinações duas a duas a que elle dá lugar.

Os numeros da 2ª serie são susceptiveis de uma imagem muito simples. Como elles se obtêm sommando os dois primeiros, os tres primeiros, etc. termos da serie natural, resulta que, se representarmos os termos successivos desta por 1, 2, 3,.....pontos, os termos da outra poderão ser representados successivamente por uma reunião cada vez maior dos mesmos pontos, os quaes sendo dispostos uns abaixo dos outros, nos darão as seguintes imagens triangulares:



Por esse motivo é que a segunda serie foi chamada dos numeros triangulares ou figurados de 2ª ordem, para destinguil-a da serie precedente que póde ser chamada dos numeros lineares ou figurados de 1ª ordem.

II — Tendo considerado o caso das combinações quaesquer duas a duas, passemos ás combinações tres a tres.

Si fixarmos o primeiro dos sete objectos considerados e o grupamos successivamente ás combinações dos seis outros dois a dois, teremos a principio tantas combinações tres a tres quantas forem aquellas isto é, 1 mais 2, mais 3, mais 4, mais 5 ou 15, conforme vimos acima.

Si fixarmos o segundo objecto e o gruparmos successivamente ás combinações dos 5 restantes dois a dois, teremos um numero de combinações tres a tres exactamente igual ao de combinações dois a dois, isto é, igual a 1 mais 2, mais 3, mais 4 ou 10, conforme vimos.

Si fizermos o mesmo para o terceiro objecto, obteremos um numero de combinações tres a tres igual ao de combinações dois a dois dos quatro restantes, isto é, igual a 1 mais 2, mais 3 ou 6.

Para o quarto, chegaremos a um numero de combinações tres a tres igual ao de combinações dois a dois dos tres restantes, isto é, a 1 mais 2 ou 3.

Finalmente, para o quinto teremos apenas 1, porque os dois objectos restantes sómente dão lugar a uma combinação.

A totalidade das combinações de 7 objectos tres a tres resulta, pois, da addicção successiva de todos as combinações de 6, de 5, de 4, de 3 e de 2 objectos, considerados dois a dois: será portanto dada pela somma dos numeros 1, 3, 6, 10, 15.

Logo, a totalidade das combinações tres a tres dos 7 objectos é representada pela somma dos 5 primeiros numeros triangulares.

Si em lugar de 7 fossem 8, 9,..... os objectos considerados, um raciocinio analogo nos mostraria que a totalidade das combinações tres a tres seria respectivamente expressa pela somma dos seis primeiros ou dos sete primeiros etc. numeros triangulares.

De modo que generalisando esta conclusão, póde-se formular esta regra : « A totalidade das combinações tres a tres é equivalente a somma de tantos termos consecutivos da serie dos numeros triangulares, quantos forem os objectos considerados menos dois. »

A determinação de um numero qualquer de combinações tres a tres fica, portanto, dependendo da sommação de uns tantos termos da serie dos numeros triangulares.

Tomando nesta serie o primeiro termo e depois as sommas dos dois primeiros, dos tres primeiros, dos quatro primeiros termos e assim por diante, teremos respectivamente os numeros que exprimem a totalidade das combinações tres a tres de 3, 4, 5, 6 etc., objectos.

Dahi a possibilidade de organisar uma tabella, permittindo determinar a totalidade das combinações tres a tres de objectos quaesquer, desde que estes não figurem em numeros muitos consideraveis. Pela natureza desta questão vê-se que similhante tabella deve comprehender forçosamente a precedente, como se nota em seguida:

nº de objectos a combinar..........	1	2	3	4	5	6	7	etc.
nº de combinações duas a duas.....		1	3	6	10	15	21	etc.
nº de combinações tres a tres......			1	4	10	20	35	etc.

Para um numero qualquer de objectos da primeira serie, a terceira nos dá, abaixo, na mesma linha vertical, a totalidade das combinações tres a tres.

Os numeros desta terceira serie comportam tambem uma imagem geometrica. Como elles se obtêm tomando successivamente o primeiro, a somma dos dois primeiros, dos tres primeiros etc. termos da serie precedente, e por serem os termos desta representados por triangulos equilateros, é claro que os termos desta outra poderão ser representados por triangulos similhantes e decrescentes, que se vão superpondo aos precedentes, e formando por conseguinte *pyramides triangulares*.

Por esse motivo esta nova serie é denominada serie dos numeros *pyramidaes*, ou figurados de terceira ordem, a qual se deriva da serie dos numeros triangulares ou figurados de segunda ordem, como esta se deriva da serie natural. (13a).

(13a) Tem-se uma ideia concreta dos numeros figurados, imaginando que representam os numeros de espheras tangentes e iguaes que podem entrar em um polygono ou n'uma pyramide regular qualquer.

III — Consideremos agóra as combinações quatro a quatro.

Grupando successivamente o primeiro dos 7 objectos considerados com as combinações dos restantes tres a tres, teremos a principio tantas combinações dos 7 objectos quatro a quatro, quantos forem as dos 6 restantes tres a tres.

Ora, vimos precedentemente que este numero é dado pela somma dos 4 primeiros termos da serie dos numeros triangulares, isto é, por 1 mais 3, mais 6, mais 10 ou 20.

Grupando o segundo objecto com as combinações dos 5 restantes tres a tres, teremos tantas combinações quatro a quatro quantas forem aquellas, que são como vimos expressas pela somma dos 3 primeiros termos da serie dos numeros triangulares; isto é, por 1 mais 3, mais 6 ou 10. Grupando o terceiro objecto com as combinações tres a tres dos 4 restantes, teremos outras tantas combinações quatro a quatro, cujo numero é dado pela somma dos dois primeiros termos da serie dos triangulares, isto é, por 1 mais 3 ou 4.

Finalmente, grupando o quarto objecto com os tres restantes, teremos apenas 1 combinação.

A totalidade das combinações dos 7 objectos quatro a quatro resulta, pois, da somma de todas as combinações tres a tres, a principio dos 6 e depois dos 5, dos 4 e dos 3 restantes. Será, pois, dado pela somma dos numeros 1, 4, 10 e 20.

Portanto, a totalidade das combinações dos 7 objectos quatro a quatro equivale á somma dos 4 primeiros termos da serie dos *numeros pyramidaes triangulares*.

Si em logar de 7 fossem 8, 9,... os objectos considerados, um raciocinio analogo nos mostraria que a totalidade das combinações quatro a quatro seria respectivamente expressa pela somma dos cinco primeiros ou dos seis primeiros etc., numeros pyramidaes triangulares.

De modo que generalisando esta conclusão pode-se formular a seguinte regra: «A totalidade das combinações quatro a quatro equivale a somma de tantos termos consecutivos da série dos numeros pyramidaes, quantos forem os objectos considerados menos tres.»

A determinação de um numero qualquer de combinações quatro a quatro fica, portanto, dependendo da sommação de uns tantos termos da serie dos numeros *pyramidaes*.

Tomando nesta série o primeiro termo e depois a somma dos dois primeiros, dos tres primeiros, dos quatro primeiros termos e assim por diante, teremos respectivamente os numeros que exprimem a totalidade das combinações quatro a quatro de 4, 5, 6, 7, etc., objectos. Dahi a possibilidade de organisar uma tabella como as precedentes, permittindo determinar a totalidade das combinações quatro a quatro de objectos em numero qualquer, desde que este não seja muito consideravel. Comprehende-se que similhante tabella não é mais do que uma extensão da precedente, differindo apenas pela inclusão da nova série 1, 5, 15, 35, 70, etc., isto é, a dos numeros figurados de quarta ordem, que não recebeu nenhum nome especial.

IV — Vimos, precedentemente, que a totalidade das combinações duas a duas é expressa pela somma de tantos termos consecutivos da série natural, quantos os objectos considerados menos um; que a totalidade das combinações tres a tres é expressa pela somma de tantos termos consecutivos da série dos numeros figurados de 2ª ordem (triangulares), quantos os objectos considerados menos dois; e finalmente, que a totalidade das combinações quatro a quatro é expressa por tantos termos consecutivos da série dos numeros figurados de 3ª ordem (pyramidaes triangulares), quantos os objectos considerados menos tres.

Podemos, pois, concluir inductivamente que a totalidade das combinações cinco a cinco será representada pela somma

de tantos termos consecutivos da série dos numeros figurados de 4ª ordem, quantos os objectos considerados menos 3; que a totalidade das combinações seis a seis será dada pela somma de tantos termos consecutivos da série dos numeros figurados de 5ª ordem, quantos os objectos considerados menos 4; e assim por diante.

Esta couclusão nos mostra que o problema das combinações é mais complicado que os precedentes; porquanto exige em todos os casos que se effectue a sommação de termos de uma série, o que por sua vez suppõe avaliações analogas nas séries anteriores donde aquella se deriva.

141. — DA NECESSIDADE DE ADOPTAR OUTRA SOLUÇÃO MAIS SIMPLES E DESDE ENTÃO MENOS ESPONTANEA. — Por este motivo vamos estabelecer uma outra marcha mais simples do que a precedente e que parece ser devida a Clairaut. (13b).

Todavia, a marcha que acabamos de apreciar não é de de todo infructifera. Ella tem a vantagem de nos dar desde já a concepção geral das séries e de fazer comprehender a necessidade de resolver o problema de sua sommação especial. (13c).

Isso posto, passemos a apreciar a marcha seguida por Clairaut na instituição da lei das combinações. Esta marcha, analoga a que era chamada pelos geometras gregos *analyse geometrica*, consiste em suppôr o problema resolvido, observar os seus elementos e dahi, de deducção em deducção, chegar ao resultado desejado.

(13b) (1713-1765) V. Clairaut. Elemens d'Algébre. 4ª ed. Paris, MDCCLX, chap. VIII pg. 259.

(13c) Ao mesmo tempo que nos mostra a necessidade de resolver o problema da sommação das séries dos numeros figurados, esta questão nos annuncia desde já o espirito da solução correspondente.

Porquanto vemos que cada sommação reduz-se a precedente até recahir no caso mais simples da escala numerica, que por seu turno reduz-se áquelle em que são iguaes os termos da série a sommar (caso da multiplicação). No fim do Curso trataremos desta sorte de avaliações.

Para melhor comprehendel-a, supponhamos que se trata de saber quantas são as combinações por somma que podem ser feitas com os sete primeiros numeros, considerados dois a dois. Imaginemos que estas combinações estejam todas indicadas. Por isso que em cada uma teremos que escrever dois algarismos, é claro que o numero total de algarismos empregados deve ser o dobro do numero total de combinações; de sorte que se conhecessemos esse numero de algarismos e tomassemos a metade, teriamos immediatamente o numero dessas combinações.

Mas, como determinar esse numero de algarismos?

Para isso basta notar que quando combinamos o primeiro algarismo com cada um dos seis seguintes, escrevemol-o 6 vezes, que quando combinamos o segundo com cada um dos cinco seguintes, o escrevemos 5 vezes; mas, notemos que este numero se eleva tambem a 6, porquanto aquelle algarismo já se acha combinado com o primeiro; e finalmente, que o mesmo se dá com o terceiro, quarto, quinto, sexto e setimo algarismos.

Portanto todos os algarismos figuram 6 vezes no caso em questão; e como o numero desses algarismos é 7, a consequencia é que a totalidade dos algarismos escriptos é 7 vezes 6.

Mas, como sabemos que o numero total dos algarismos escriptos é o dobro do numero procurado de combinações, o resultado é que esse numero é a metade daquelle, isto é,

$$\frac{7 \text{ vezes } 6}{2}.$$

Assim o numero total de combinações duas a duas, é representado por uma fracção cujo denominador é 2 e cujo numerador é um producto de dois factores consecutivos e decrescentes, sendo o maior igual á totalidade dos objectos a combinar.

Supponhamos agora que se trata de conhecer quantas combinações produzem os 7 primeiros numeros, considerados tres a tres.

Imaginemos indicadas todas essas combinações. Cada uma tendo tres algarismos, é claro que o numero total dos algarismos empregados é o triplo do numero de combinações indicadas.

De sorte que, si for conhecida a totalidade desses algarismos, bastará tomar a terça parte para ter a totalidade das combinações.

Mas, como obter o numero total dos algarismos empregados?

Para isso basta considerar que nestas combinações cada algarismo entra o mesmo numero de vezes que o primeiro. Ora, quando formamos as combinações tres a tres em que este entra, não fazemos mais do que grupal-o com as combinações dos seis restantes, dois a dois; de modo que elle figura tantas vezes quantas as combinações dos 6 restantes, dois a dois.

Concluimos pois: 1° que cada algarismo entra o mesmo numero de vezes; 2° que cada um entra tantas vezes quantas as combinações duas a duas, dos 6 restantes, isto é,

$$\frac{6 \text{ vezes } 5}{2}.$$

Mas, si cada algarismo entra este numero de vezes, os 7 algarismos considerados, entrarão 7 vezes mais, isto é,

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5}{2}.$$

Isso posto, resulta do que dissemos acima, que bastará tomar a terça parte deste numero para obter a tota-

lidade das combinações dos 7 objectos tres a tres, o que dá portanto:

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5}{2 \text{ vezes } 3}.$$

Para tornar esta formula mais conveniente, basta introduzir o factor 1 no denominador, o que evidentemente não o altera, e que dá:

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3}.$$

Podemos, pois, enuncial-a por este modo: « A totalidade das combinações tres a tres é representada por uma fracção cujo denominador é o producto dos tres primeiros termos da escala numerica e cujo numerador é um producto de tres factores consecutivos e decrescentes, sendo o maior o numero de objectos a combinar.»

Por isso que o raciocinio que fizemos para o caso da taxa tres é applicavel a outra qualquer, somos levados a generalisar a regra das combinações dizendo: « A totalidade das combinações quaesquer equivale a uma fracção tendo para numerador um producto de factores consecutivos e decrescentes, desde o que exprime o numero de objectos a combinar inclusive, até aquelle cuja ordem attinge a taxa de agrupamento; e cujo denominador é um producto de igual numero de termos da escala numerica, a partir do primeiro. »

Esta regra nos deixa ver ao mesmo tempo qual a relação que existe entre uma combinação qualquer e a de ordem immediatamente superior.

Com effeito, isolando na expressão fraccionaria obtida os maiores factores do numerador e do denominador, vê-se

logo que « para passar do numero de combinações de uma ordem para o de ordem immediatamente superior, basta multiplical-o por uma fracção cujo numerador é a totalidade dos objectos a combinar, e cujo denominador è a nova taxa de agrupamento ».

Assim, por exemplo, conhecendo o numero de combinações de 6 objectos 3 a 3, ter-se-ha o de 7 objectos 4 a 4, multiplicando-o por $\frac{7}{4}$, que dá $\frac{7}{4}$ multiplicado por

$$\frac{6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3}.$$

Do mesmo modo conhecendo o numero de combinações de 7 objectos 4 a 4, para ter o de 8, 5 a 5, bastará multiplical-o por $\frac{8}{5}$ e etc.

142.— A CONNEXÃO ENTRE OS TRES PROBLEMAS REVELADA PELA COMPARAÇÃO DESSE ENUNCIADO COM OS QUE RESULTAM DOS PROBLEMAS DAS PERMUTAÇÕES E DOS ARRANJOS. — Uma vez conhecida a solução das combinações, si já se tem como nós resolvido os dois anteriores, facilmente se apanha a connexidade que existe entre os tres. Porque na formula normal das combinações, o numerador representa o numero de arranjos analogos e o denominador o numero de permutações correspondentes á taxa de agrupamento. Podemos, pois, substituir aquelle enunciado por outro mais simples, dizendo simplesmente que « o numero de combinações quaesquer é igual ao de arranjos analogos dividido pelo de permutações correspondentes á taxa de agrupamentos ». Mas, nós vamos comprehender melhor similhante connexidade instituindo a solução systematica deste triplice problema, que será o assumpto do paragrapho seguinte.

§ ιδ' (14)

Solução systematica dos tres problemas das permutações, arranjos e combinações

143. — Comparação dos tres problemas. Jerarchia de difficuldades. — O conjuncto das considerações que fizemos no paragrapho precedente, mostra que o problema das permutações é o mais facil e o das combinações o mais difficil. As formulas que encerram a solução dos tres problemas resumem aliás similhante conclusão. O encadeamento normal deste triplice problema deve, pois, consistir em reduzir o das combinações ao dos arranjos e finalmente este ao das permutações, subordinando assim o caso mais complicado ao mais simples, que então é resolvido directamente.

Todavia, ha utilidade logica em considerar os outros dous encadeamentos, sobretudo para relativar as nossas concepções e patentear que só o ponto de vista subjectivo permitte uma systematisação definitiva.

144. — Reducção das combinações aos arranjos por intermedio das permutações. — O problema das combinações liga-se facilmente ao dos arranjos: Imaginando, com effeito, que tivessemos formado todas as combinações de um certo numero de objectos, bastaria evidentemente permutar os elementos de cada uma destas combinações, para obter logo todos os arranjos que comportam os mesmos objectos.

Nestas condições, cada combinação produzindo tantos arranjos quantas as permutações dos objectos que encerra, é claro que o numero total de arranjos será equivalente ao de combinações, repetido tantas vezes quantas forem aquellas permutações.

---

(14) Numero tessareskaideka (quatorze).

Dahi resulta, pois, que «o numero de combinações quaesquer é igual ao de arranjos analogos dividido pelo de permutações correspondentes á taxa de agrupamento». (14a).

E' assim, por exemplo, que tomando tres objectos, representados por 1, 2 e 3 e os combinando dois a dois teremos:

1,2 1,3 2,3

Permutando os dois objectos que entram em cada uma destas combinações, teremos evidentemente todos os arranjos dos tres objectos considerados, a saber :

1,2 1,3 2,3
2,1 3,1 3,2

onde se vê que o numero total de arranjos é igual ao das combinações repetido tantas vezes, quantas são as permutações dos dois objectos que figuram em cada combinação ; e que por conseguinte para ter o numero de combinações basta dividir o de arranjos pelo das permutações.

Este primeiro apanhado deve ser considerado como esboçando a solução da questão, por isso que faz depender a solução do problema das combinações, do problema dos arranjos, que é incontestavelmente mais facil.

Mas, para chegar á solução definitiva, precisamos reduzir por sua vez o problema dos arranjos ao das permutações.

145. — UMA SEGUNDA REDUCÇÃO : DOS ARRANJOS ÁS PERMUTAÇÕES. — Esta reducção consegue-se por considerações similhantes ás que forneceram a precedente. Com effeito, supponhamos conhecidos todos os arranjos por meio dos objectos ou signaes que os permittem fixar. Si ao lado de cada arranjo escrevermos successivamente todas as permu-

(14a) A marcha seguida aqui é ainda uma applicação da que empregamos no fim do paragrapho precedente para instituir, segundo Clairaut, a lei das combinações. Suppomos, com effeito, que o problema está resolvido, isto é, que são conhecidas todas as combinações dos objectos considerados e etc.

tações dos objectos que elle não contém, teremos evidentemente todas as permutações dos objectos considerados. Ora, si cada arranjo dá tantas permutações totaes quantas as permutações parciaes dos objectos que não encerra, é claro que o numero dessas permutações totaes é igual ao de arranjos multiplicado pelo numero de permutações parciaes, isto é, de permutações da parte dos objectos que não figuram em cada agrupamento.

Por conseguinte, « o numero dos arranjos quaesquer equivale ao das permutações da totalidade dos objectos, dividido pelo numero das permutações dos que não figuram no agrupamento ».

Para maior clareza, tomemos, por exemplo, os sete primeiros numeros da escala e supponhamos formados os seus arranjos tres a tres.

Dispondo esses arranjos em columnas e escrevendo cada um ao lado das permutações dos algarismos que não contém, tantas vezes quantas fôrem possiveis, é obvio que teremos formado todas as permutações dos sete algarismos considerados.

E por isso que cada arranjo de tres algarismos dá lugar a tantas permutações de sete algarismos, quantas são as permutações dos quatro algarismos que não encerra, vê-se que o numero de permutações dos sete algarismos é igual ao de arranjos correspondentes, tres a tres, multiplicado pelo numero de permutações dos quatro algarismos restantes.

Por conseguinte, o numero de arranjos dos sete algarismos, tres a tres, é igual ao numero das permutações dos mesmos algarismos, dividido pelo de permutações dos quatro algarismos restantes. Vê-se que esta solução faz recahir o problema dos arranjos no das permutações, do mesmo modo que o das combinações foi reduzido áquelle.

146. — SOLUÇÃO DIRECTA DO PROBLEMA DAS PERMUTAÇÕES. — Tendo reduzido o problema das combinações ao dos arranjos e este ao das permutações, sómente resta estabe-

lecer directamente esta ultima solução. Já o fizemos de modo completo no paragrapho precedente. Todavia vamos reproduzil-a aqui de modo mais systematico, tornando bem evidente a dependencia que existe entre o numero de permutações de uma ordem e o de ordem immediatamente inferior; e utilisando tal dependencia para reduzir gradativamente o caso mais complicado ao mais simples.

Para isso supponhamos que se trata de conhecer a totalidade das permutações de 7 objectos.

E' evidente que para ter todas estas permutações bastará em seguida a cada um dos objectos collocar todas as permutações dos 6 objectos restantes; e como nós repetimos esta operação tantas vezes quantos são os objectos considerados, é claro que o numero total das permutações é igual a 7 multiplicado pelo numero de permutações de ordem immediatamente inferior; isto é, pelo numero de permutações de 6 objectos. Como, porém, para obter a totalidade destas ultimas permutações basta fixar cada objecto e collocar em seguida as permutações dos 5 restantes, o numero de permutações de 6 objectos será igual a 6 vezes o numero de permutações de 5.

Raciocinando similhantemente, mostrariamos que o numero de permutações de 5 objectos equivale a 5 vezes o numero de permutações de 4; que o numero de permutações de 4 é o mesmo que 4 vezes o numero de permutações de 3; e finalmente, que o numero de permutações de 3 objectos é igual a 3 vezes o numero de permutações de 2 desses objectos. Ora, o numero de permutações de 2 objectos é evidentemente igual a 2, porque para formal-os basta fixar separadamente cada um dos dois objectos e grupal-o com o outro, o que fornece apenas 2 grupos.

A consequencia é que o numero de permutações de 3 ficará sendo igual a 3 vezes 2; o de permutações de 4 igual a 4 vezes 3 vezes 2; o numero de permutações de

5 igual a 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2; o de permutações de 6 igual a 6 vezes 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2, e finalmente o de permutações de 7 objectos fica sendo igual a 7 vezes 6 vezes 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2.

Introduzindo neste producto o factor 1, e invertendo a sua ordem, podemos dizer que o numero de permutações de 7 objectos equivale ao producto dos sete primeiros termos da escala numerica.

E como o raciocinio que acabamos de fazer para este caso de 7 objectos é applicavel a outro qualquer, podemos dizer que « o numero de permutações quaesquer, é representado pelo producto de todos os termos consecutivos da escala numerica, desde o primeiro até o que exprime o conjuncto dos objectos a permutar, inclusive ».

150. — A SOLUÇÃO FINAL DO PROBLEMA DOS ARRANJOS E DAS COMBINAÇÕES. — De posse desta formula das permutações podemos agora, seguindo uma marcha inversa, simplificar a formula dos arranjos e por fim a das combinações, que terá então sua expressão definitiva.

Tomando a fórmula dos arranjos, nós vimos que ella era representada pelo quociente entre o numero de permutações da totalidade dos objectos propostos e o numero de permutações do conjuncto dos objectos excedentes a cada grupo.

E como acabamos de vêr que o numero de permutações é sempre representado por um producto de tantos termos da escala numerica, a partir do primeiro, quantos são os objectos a permutar, a consequencia é que, na fórmula dos arranjos, o producto que serve de dividendo contém necessariamente o que serve de divisor.

Portanto, o quociente será a parte não commum a ambos, e esta parte será um producto de factores consecutivos e decrescentes, a partir do que exprime o numero dos objectos a arranjar, até aquelle cuja ordem é marcada pela taxa dos arranjos.

Póde-se, por conseguinte, traduzir mais simplesmente a fórmula dos arranjos dizendo que « o numero de arranjos quaesquer equivale ao producto de uma serie continua de factores decrescentes, desde o que exprime o numero total dos objectos, até aquelle cuja ordem é marcada pela taxa de agrupamento ».

Por exemplo, para o numero de arranjos de 7 objectos 3 a 3, achariamos o producto de 7 por 6 por 5; que é portanto o quociente da divisão do numero de permutações de 7 objectos pelo numero de permutações de 4, ou, isto é, do producto 1 por 2 por 3 por 4 por 5 por 6 por 7 pelo producto 1 por 2 por 3 por 4.

Simplificada a fórmula dos arranjos, resulta immediatamente a fórmula final das combinações.

O numero de combinações quaesquer sendo expresso pelo quociente da divisão do numero de arranjos analogos pelo de permutações correspondentes á taxa dos grupos, só nos resta substituir o dividendo e o divisor pelos productos correspondentes. « O numero de combinações fica então expresso por uma fracção, cujo numerador é o producto de tantos factores consecutivos e decrescentes, quantos indica a taxa de agrupamento ; e cujo donominador é o producto de igual numero de termos consecutivos da escala numerica, a partir do primeiro. » Por exemplo, no caso de 7 objectos a combinar 3 a 3, acha-se

$$\frac{7 \text{ por } 6 \text{ por } 5}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$$

o que dá 35 combinações.

O triplice problema das combinações, arranjos e permutações fica assim systematicamente resolvido, fazendo recahir o caso mais complicado, isto é, o das combinações, no caso mais simples, representado pelas permutações, por intermedio dos arranjos.

151. — DA CONCEPÇÃO GERAL DOS OUTROS DOIS ENCADEAMENTOS.—Tendo instituido o encadeamento normal desses tres problemas, examinemos agora a titulo de exercicio logico, os outros dois encadeamentos que elles comportam.

1.° Comecemos por vêr como os tres problemas podem depender dos arranjos. Já vimos acima que o problema das combinações recahe no dos arranjos por meio do das permutações.

Portanto, para ficar tudo dependendo dos arranjos, basta mostrar como a enumeração das permutações póde reduzir-se á dos arranjos. Nesse intuito basta reflectir que, se formarmos os arranjos no caso em que a taxa de agrupamento é igual a totalidade dos objectos menos um, teremos immediatamente as permutações juntando á cada arranjo o objecto que elle não contiver. Dahi se conclue que o numero de permutações da totalidade coincide com o numero de arranjos, quando só um objecto fica fóra do agrupamento.

Esta observação permitte formular a lei das permutações quando a dos arranjos fôr conhecida. Ora, já mostrámos qual essa lei, examinando directamente o problema dos arranjos. Em virtude della o numero das permutações fica equivalendo ao producto de uma série continua de factores decrescentes, desde a totalidade até 2. (Assim, por exemplo, a totalidade das permutações de 4 objectos sendo equivalente á de arranjos de 4 objectos, 3 a 3, será igual ao producto de 4 por 3 por 2).

Introduzindo o factor 1, e invertendo a ordem de todos chega-se ao enunciado normal.

A fórmula das combinações torna-se portanto uma fracção em que o numerador é o numero de arranjos analogos, e em que o denominador é o numero de arranjos dos objectos de cada grupo, na hypothese em que a taxa é igual ao numero desses objectos menos um.

Esta fórmula coincide, pois, com a fórmula achada.

2.° Vejamos finalmente como é possivel reduzir os tres problemas ao das combinações. Para isso notemos que só nos falta exprimir as permutações por meio das combinações, porquanto já sabemos reduzir o problema dos arranjos ao das permutações.

Para exprimir as permutações por meio das combinações, imaginemos que se conhece as combinações de um certo numero de objectos, na hypothese de ser a taxa de agrupamento igual á totalidade delles menos um.

E' claro que, para ter todas as permutações, bastaria permutar os objectos de cada combinação e ajuntar a cada resultado o objecto que este não contivesse. Por exemplo, si tivessemos as combinações dos tres primeiros numeros dois a dois, isto é,

1,2 1,3 2,3

e quizessemos ter todas as permutações a que dão lugar, bastaria permutar os objectos das combinações precedentes, o que daria

1,2 1,3 2,3
2,1 3,1 3,2

e juntar a cada resultado o numero que elle não contivesse, o que daria

3,1,2 2,1,3 1,2,3
3,2,1 2,3,1 1,3,2

Portanto, o numero das combinações, quando a taxa do agrupamento equivale á totalidade menos um, sendo multiplicado pelo numero das permutações do agrupamento é igual ao das permutações da totalidade. (Assim, por exemplo, o numero de combinações de 4 objectos 3 a 3, multiplicado pelo de permutações de 3, é igual á totalidade das permutações dos 4 objectos; do mesmo modo que a totalidade das permutações de tres objectos é igual ao numero

de combinações de 3 objectos 2 a 2, multiplicado pelo de permutações de 2).

Esta lei reduz a contagem das permutações de uma ordem, á de ordem precedente, quando se conhece a das combinações.

Desde então ella faz depender a solução do problema das permutações, da solução do problema das combinações e do conhecimento do numero de permutações de dois objectos que é intuitivo. A conveniente applicação desta lei exige que se comece por determinar o numero de combinações, na hypothese particular que ella encerra. A fórmula das combinações directamente obtida, nos mostra que tal numero coincide com a totalidade dos objectos considerados. Assim, por exemplo, o numero de combinações de 6 objectos 5 a 5 é 6; o numero de combinações de 16 objectos 15 a 15 é 16, e assim por diante. Esta observação póde ser olhada como consequencia de uma outra mais geral e mais importante pelas suas applicações em Algebra, e que a enumeração directa de combinações quaesquer deixa perceber.

E' a seguinte: Quando combinamos um numero qualquer de objectos, segundo uma taxa tambem qualquer, por exemplo, 5 objectos, 2 a 2 ou 3 a 3, e etc., os 3, 2... objectos restantes ficam implicitamente combinados; de modo que o numero de combinações de 5 objectos 2 a 2, é igual ao de combinações de 5 objectos 3 a 3, isto é, 5 menos 2.

Similhantemente o numero de combinações de 5 objectos 3 a 3 equivale ao de combinações de 5 objectos 2 a 2, isto é, 5 menos 3; e assim por diante. E' o que se vê em seguida contando as combinações dos 5 objectos 2 a 2 ahi classificadas, e as que dellas resultam:

1, 2 . . . . 3, 4, 5
1, 3 . . . . 2, 4, 5

1, 4	2, 3, 5
1, 5	2, 3, 4
2, 3	1, 4, 5
2, 4	1, 3, 5
2, 5	1, 3, 4
3, 4	1, 2, 5
3, 5	1, 2, 4
4, 5	1, 2, 3

Comprehende-se que esta propriedade subsistirá do mesmo modo quando restar apenas um objecto fóra de cada grupo, de sórte que o numero de combinações de 5 objectos 4 a 4, por exemplo, será igual á totalidade dos objectos que não figurarem nos grupos respectivos, isto é, a 5.

Estas observações nos mostram ainda uma vez que « a instituição de qualquer contagem consiste em reduzil-a a um classamento. » (14b).

Voltando á questão de que nos occupamos, podemos concluir que o numero de permutações de uma ordem é igual ao da totalidade dos objectos, multiplicado pelo numero das permutações da ordem precedente. Chega-se assim a uma observação que já foi feita e da qual se deduziu a fórmula habitual das permutações. Obtida esta e conhecida a das combinações, tem-se a dos arranjos.

152.— APRECIAÇÃO DE UM THEOREMA NUMERICO RESULTANTE DA LEI DAS COMBINAÇÕES.— « Um theorema numerico, assás precioso para ser notado aqui, surge espontaneamente da lei das combinações, quando se compara sua fórma, naturalmente fraccionaria, com seus resultados necessariamente inteiros. » Póde ser enunciado deste modo: *todo producto de factores consecutivos em numero qualquer, é sempre exactamente divisivel pelo producto de igual numero de termos da escala numerica a partir do primeiro*.

(14b) Notas do Curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.

Póde-se, com effeito, considerar similhante quociente como sendo a solução de um problema das combinações; e como o numero destas é inteiro, a consequencia é que este quociente é sempre inteiro, o que demonstra o theorema.

Esta demonstração é o que se chama uma demonstração indirecta.

E' a primeira vez que a mathematica apresenta essa deducção transcendente; mas veremos que não é a ultima; havemos de encontrar, nos seus outros dominios, demonstrações analogas. E' assim que muitas proposições que são difficeis de demonstrar por um raciocinio directo em Geometria, tornam-se facilmente demonstraveis em Mecanica por via indirecta.

No caso de que nos occupamos, torna-se directamente impossivel apanhar a relação além de tres factores. No caso de dois factores, a lei é intuitiva; porque, de dois numeros consecutivos, um é sempre par e portanto divisivel por 2. Tomemos agora o caso de 3 factores. Admittindo que o primeiro não é divisivel por 3, é claro que elle dá um resto que só póde ser 1 ou 2: Si for 1, o primeiro factor será um multiplo de 3 mais 1; o segundo factor será um multiplo de 3 mais 2; e o terceiro um multiplo de 3 mais 3, isto é, um multiplo de 3.

O raciocinio seria analogo no caso do resto ser 2, e provaria então que o segundo factor seria multiplo de 3. Ora, um dos dois factores restantes, sendo evidentemente divisivel por 2, a consequencia é que o producto dos tres será divisivel por 1 vez 2 vezes 3. Conhecida directamente a relação para o caso de tres factores, torna-se impossivel apanhal-a directamente no caso de 4, 5...... etc. Mas isto basta para a sua verificação gèral, apreciando a dependencia de cada caso para o precedente. (14c).

(14c) A. Comte — Synth. Subject. Chapitre I, pag. 138.

Para comprehender esta marcha supponhamos que se trata de demonstrar, raciocinando directamente, que o producto de 7 por 6 por 5 por 4 é exactamente divisivel pelo producto dos quatro primeiros termos da escala; isto é, que a expressão fraccionaria

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4}$$

dá um resultado necessariamente inteiro. Isolando e comparando os maiores factores do numerador e do denominador, podemos considerar

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4}$$

como sendo equivalente a $\frac{7}{4}$ multiplicado por

$$\frac{6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3};$$

ou ainda ao producto de 1 mais $\frac{3}{4}$ por

$$\frac{6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3}$$

$\left(\text{por ser } \frac{7}{4} \text{ o mesmo que } \frac{4}{4} \text{ mais } \frac{3}{4}, \text{ isto é, } 1 \text{ mais } \frac{3}{4}\right)$;

ou ainda, effectuando a multiplicação, a

$$\frac{6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3} \text{ mais } \frac{6 \text{ vezes } 5 \text{ vezes } 4 \text{ vezes } 3}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4}.$$

A fracção proposta fica assim decomposta na somma de duas outras: uma com um factor de menos em ambos os termos, e a outra com igual numero de factores, sendo, porém, cada um diminuido de uma unidade no numerador.

Comprehende-se que seguindo a mesma marcha, cada uma destas fracções se decomporá por sua vez em duas novas, uma com um factor de menos e outra com igual numero, mas sendo diminuido cada um de uma unidade.

E como, pelo redobramento do processo nas fracções desta ultima especie, os factores do numerador vão successivamente diminuindo, é claro que um momento chegará em que elles tornar-se-hão iguaes aos do denominador.

Quanto ás outras fracções, cujos factores vão successivamente desapparecendo em ambos os termos, comprehende-se facilmente que ellas irão recahir todas em fracções contendo apenas dois factores, onde a divisibilidade é como vimos intuitiva. Como o raciocinio que fizemos é independente do numero de factores, póde-se concluir a possibilidade de *decompor sempre a fracção proposta em duas outras que se obtem, como vimos, diminuindo separadamente de uma unidade, ora o numero, ora a grandeza dos factores do producto que se considera*. Para tirar deste theorema toda a utilidade que elle comporta, convém precisar melhor a significação concreta das alterações abstractas de que se trata.

Assim, no exemplo acima, a decomposição effectuada significa que o *numero de combinações de 7 objectos, 4 a 4, equivale á somma do numero de combinações de 6 objectos, 3 a 3, com o numero de combinações de 6 objectos, 4 a 4.*

Essa conclusão tem a maior importancia logica, porque nos vai mostrar a connexão que existe entre o problema das combinações e um outro não menos importante, de que trataremos no paragrapho seguinte.

§ 1.º (15)

Consequencias da theoria numerica da ordem. Theoria das repartições

153.— Afim de terminar a apreciação da *theoria numerica da ordem*, vamos examinar as suas principaes consequencias.

Ellas são de duas ordens: umas especiaes e outras geraes. Como typo das primeiras, A. Comte indica *a theoria das repartições*, que passamos a estudar, para depois apreciar summariamente as segundas.

154.— Repartições. — Chamam-se repartições as diversas partilhas, quer binarias, quer ternarias, etc., que podem comportar um certo numero de objectos entre um certo numero de pessoas, sem excluir as soluções nullas, isto é, considerando tambem a hypothese, que a pratica realiza algumas vezes, em que certas pessoas nada recebem, e mesmo aquella em que nada existe a repartir.

Para induzir a lei que preside a enumeração das partilhas, vamos classifical-as successivamente, a principiar no caso em que são feitas entre 2 pessoas, depois entre 3 e assim por diante, augmentando progressivamente de uma unidade o numero de objectos a repartir em cada caso, a começar por zero.

1.º Consideremos em primeiro logar o caso mais simples em que a repartição se faz entre duas pessoas.

Suppondo a principio que nada ha a dividir, é evidente que o problema comporta uma unica solução:

1ª pessoa 0, 2ª pessoa 0 } 1 repartição

(15) Numero — *pentekaídeka* (quinze).

Admittindo que apenas ha 1 objecto a dividir, por isso que a questão só comporta soluções inteiras, é obvio que poderemos fazer as 2 repartições seguintes:

1ª pes. 1,	2ª pes. 0	2 repartições.
1ª pes. 0,	2ª pes. 1	

Sendo 2 o numero de objectos a repartir, teremos:

1ª pes. 2,	2ª pes. 0	3 repartições.
1ª pes. 1,	2ª pes. 1	
1ª pes. 0,	2ª pes. 2	

Si 3 é o numero de objectos a repartir, teremos:

1ª pes. 3,	2ª pes. 0	4 repartições.
1ª pes. 2,	2ª pes. 1	
1ª pes. 1,	2ª pes. 2	
1ª pes. 0,	2ª pes. 3	

Sendo 4 a somma dos objectos a repartir poderemos dispensar de classifical-os observando, de accordo com os resultados precedentes, que si attribuirmos successivamente á 1ª pessoa todos os valores inteiros de 4 a 0, resultará ao mesmo tempo para a 2ª todos aquelles de 0 a 4.

Serão, pois, ao todo 5 repartições.

Si considerassemos 5 objectos a repartir por 2 pessoas, achariamos tambem o numero de repartições, notando que a 1ª receberia successivamente todos os valores de 5 a 0, ao mesmo tempo que a 2ª tomaria todos aquelles de 0 a 5. Seriam, pois, ao todo 6 repartições. Pelos resultados precedentes vê-se que o numero de repartições de 0, por 2 pessoas é 1; que o numero de repartições de 1 objecto por 2 pessoas é 2; que o de repartições de 2 por 2 pessoas é 3;

que o numero de repartições de 3 objectos é 4; o de 4 é 5, etc.

Isso mostra que *a totalidade das repartições por 2 pessoas* equivale á somma a repartir augmentada de uma unidade.

2.° Consideremos agora o caso em que a taxa de partilha é 3. Ponhamos de lado a hypothese em que nada ha a repartir, pois já sabemos que só existe então uma unica repartição possivel:

1ª pes. 0,	2ª pes. 0,	3ª pes. 0	1 repartição.

Si ha 1 objecto a repartir por 3 pessoas, teremos evidentemente as 3 repartições seguintes:

1ª pes. 1,	2ª pes. 0,	3ª pes. 0	3 repartições.
1ª pes. 0,	2ª pes. 1,	3ª pes. 0	
1ª pes. 0,	2ª pes. 0,	3ª pes. 1	

Sendo 2 os objectos a repartir por 3 pessoas, teremos as 6 repartições seguintes:

1ª pes.	2,	1,	1,	0,	0,	0	6 repartições,
2ª pes.	0,	1,	0,	2,	1,	0	
3ª pes.	0,	0,	1,	0,	1,	2	

onde as quotas que cabem respectivamente á 1ª, 2ª e 3ª se correspondem numa mesma linha vertical e cuja somma perfaz sempre os 2 objectos propostos.

Si a somma a repartir for 3, teremos as 10 repartições seguintes:

1ª pes.	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2,	3	10 repartições.
2ª pes.	0,	1,	2,	3,	0,	1,	0,	0,	1,	0	
3ª pes.	3,	2,	1,	0,	2,	1,	2,	1,	0,	0	

Como no caso precedente, vê-se que as differentes partes tomam tambem todos os valores possiveis, desde a somma a dividir até zero. Notemos, porém, que muitas partilhas differentes podem ter logar aqui sem que seja preciso de cada vez mudar o valor dos lotes.

E' assim que se póde dar a uma das pessoas uma parte da somma a dividir, e repartir o que resta entre as duas outras de todas as maneiras possiveis.

Ora, o numero destas repartições secundarias sendo dado pela regra precedente, podemos concluir que a totalidade das repartições de 3 objectos por 3 pessoas se compõe: 1°, de tantas repartições em que a 1ª tem 0, quantas são as repartições dos 3 objectos pelas outras 2 ; 2°, de tantas repartições em que a 1ª tem 1, quantas são as repartições de 2 objectos pelas outras 2 ; 3°, de tantas repartições em que a 1ª tem 2, quantas são as repartições de 1 objecto pelas outras 2 ; e finalmente, de 1 repartição em que a 1ª pessoa fica com os 3 objectos e as 2 restantes nada recebem.

A totalidade destas repartições é, pois, expressa pela somma dos numeros 4, 3, 2 e 1, isto é, por 10.

Sendo 4 o numero de objectos a repartir por 3 pessoas, um raciocinio analogo nos mostrará que a totalidade destas repartições será igual á somma das repartições por 2 pessoas de todas as quotas desde 4 até 0, isto é, a 5 mais 4 mais 3 mais 2 mais 1, o que perfaz 15.

O mesmo raciocinio sendo applicavel a um numero qualquer de objectos a repartir por 3 pessoas, podemos concluir que « a totalidade de taes repartições é sempre igual á somma das repartições por 2 pessoas, do numero a repartir e de todos os que o precedem até zero ».

3.° Supponhamos agora o caso em que a taxa de partilha é 4.

Sabendo quantas partilhas comporta um numero qualquer de objectos por 3 pessoas, e raciocinando como no caso

precedente, veremos que « a totalidade das repartições por 4 pessoas se compõe da somma das repartições por 3 pessoas de todas as quotas, desde o numero considerado até zero ».

Assim, por exemplo, o numero de repartições de 5 objectos por 4 pessoas se comporá de tantas repartições em que a 1ª tem *0*, quantas derem os 5 objectos pelas 3; de tantas repartições em que a 1ª terá *1*, quantas derem as 4 restantes pelas 3; de tantas repartições em que a 1ª terá *2*, quantas derem as 3 restantes pelas 3; de tantas repartições em que a 1ª terá *3*, quantas derem as 2 restantes pelas 3; de tantas repartições em que a 1ª terá *4*, quantas resultarem de 1 restante pelas 3; e, finalmente, de tantas repartições em que a 1ª terá *5*, quantas as repartições de *0* pelas *3*.

Assim o numero de repartições de 5 objectos por 4 pessoas equivalerá á somma das repartições de 5, de 4, de 3, de 2, de 1 e de 0, por 3 pessoas.

Raciocinando do mesmo modo quando se tratar de um numero qualquer de objectos, seremos levados a concluir que « a totalidade das repartições por 4 pessoas se compõe da somma que se obtem repartindo por 3 pessoas, não só o numero a dividir, como todos os que o precedem até zero, inclusive ».

Si a taxa de partilha fosse 5, reduziriamos de modo analogo esta especie de partilha á precedente.

« A totalidade das repartições por 5 pessoas se comporia da somma das repartições por 4 pessoas, não só do numero a repartir como de todos os precedentes até zero, inclusive. »

As considerações precedentes bastam para permittir apanhar a lei, segundo a qual cada especie de partilha reduz-se directamente á precedente.

Com effeito, a inducção nos levaria por esta fórma a concluir que em geral, « *toda a repartição equivale á somma das applicações da precedente ao numero que se quer*

repartir e a todos os que o precedem até zero, inclusive».

Este enunciado da lei das repartições póde ser substituido por um outro que é muito mais simples.

Com effeito, as parcellas daquella somma, a partir da segunda, são tambem, em virtude da mesma lei que as domina, equivalentes á totalidade das repartições de ordem immediatamente inferior quanto ao numero de objectos a repartir; de modo que o conjuncto das repartições consideradas fica apenas disposto em dois grupos distinctos.

Tomando, para fixar as idéas, o exemplo acima, nós vimos que o conjuncto das repartições de 5 objectos por 4 pessoas, compõe-se da totalidade das repartições de 5 objectos por 3 pessoas, de um lado, e da somma das repartições de 4, de 3, de 2, de 1 e de 0 por 3 pessoas.

Ora, esta ultima somma sendo equivalente ao numero de repartições de 4 objectos por 4 pessoas, nós concluimos que o numero de repartições de 5 objectos por 4 pessoas equivale á somma das repartições de 5 objectos por 3 pessoas com as repartições de 4 objectos por 4 pessoas.

Pela mesma razão, o numero de repartições de 6 objectos por 4 pessoas seria igual á somma das repartições de 6 objectos por 3 pessoas com as repartições de 5 objectos por 4 pessoas; o numero de repartições de 7 objectos por 5 pessoas será igual á somma das repartições de 7 objectos por 4 pessoas com as repartições de 6 objectos por 5 pessoas, etc.

Podemos, pois, dar este outro enunciado geral da lei em questão: «toda a repartição equivale á somma das duas outras que se obtêm diminuindo separadamente de uma unidade já a taxa de partilha, já o numero de objectos a repartir».

155.— CONNEXÃO ENTRE O PROBLEMA DAS REPARTIÇÕES E O DAS COMBINAÇÕES. — O enunciado precedente é

muito similhante áquelle a que chegamos na theoria das combinações.

No fim do paragrapho anterior, vimos, com effeito, que « toda a combinação equivale á somma das duas outras que se obtem diminuindo separadamente de uma unidade, já a taxa de agrupamento, já esta e a totalidade dos objectos a combinar ».

Esta analogia nos leva naturalmente a acreditar na existencia de certa connexão entre as soluções dos dois problemas e a procurar deduzir uma da outra. Mas, para nos certificarmos de similhante correlação e tirar della todas as consequencias necessarias, precisamos primeiramente comparar os resultados numericos fornecidos pela lei das repartições com aquelles a que chegamos directamente mediante a lei das combinações, já sob a fórma de uma somma, já sob a de um quociente.

156.— Apreciação das series numericas fornecidas pela lei das repartições. — Vimos no numero antecedente que « toda a repartição equivale á somma das applicações da precedente ao numero que se quer repartir e a todos aquelles que o precedem até zero, inclusive ». Applicando esta lei á enumeração das repartições de um numero qualquer de objectos, nos casos em que a taxa de partilha é successivamente 3, 4, 5, etc., verifica-se facilmente:

1.° Que sendo 3 a taxa de partilha, a totalidade das repartições correspondentes é igual á somma de tantos termos da escala numerica, quantos são os objectos a partilhar mais um.

Assim, por exemplo, o numero de repartições de 7 objectos por 3 pessoas é igual á somma dos 8 numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Porque a totalidade de taes repartições sendo igual á somma das 7, 6...2, 1, 0 por 2 pessoas, será dada pela addicção successiva dos numeros 7 mais 1, 6 mais 1, ... 2 mais 1, 1 mais 1, 0 mais 1; visto como

sabemos, que toda repartição por 2 é igual ao numero de objectos a partilhar mais um.

2º Que sendo 4 a taxa de partilha, a totalidade das repartições correspondentes é igual a somma de tantos termos da serie dos numeros figurados de 2ª ordem (ou triangulares), quantos os objectos a repartir mais um. Assim, por ex., o numero de repartições de 7 objectos por 4 pessoas é igual á somma dos 8 primeiros numeros triangulares, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 e 35.

Com effeito, a totalidade destas repartições, sendo igual á somma das 7, 6... 2, 1, 0 por 3 pessoas, será dada respectivamente pela addicção successiva dos numeros da escala numerica de 1 a 8, de 1 a 7, de 1 a 6, de 1 a 5, de 1 a 4, de 1 a 3, de 1 a 2 com 1; isto é, pela somma daquelles numeros triangulares.

3º Que sendo 5 a taxa de partilha, a totalidade das repartições correspondentes é igual á somma de tantos termos da serie dos numeros figurados de 3ª ordem (ou pyramidaes triangulares), quantos os objectos a repartir mais um. Assim, por ex., o numero de repartições de 7 objectos por 5 pessoas é igual á somma dos 8 primeiros numeros pyramidaes triangulares, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 119.

Com effeito, a totalidade destas repartições sendo igual á somma das de 7, 6... 2, 1, 0 por 4 pessoas, será dada respectivamente pela addicção successiva dos 8, dos 7, dos 6, dos 5, dos 4, dos 3, dos 2 e do 1º dos numeros triangulares; isto é, pela somma daquelles numeros pyramidaes triangulares.

Raciocinando do mesmo modo, concluir-se-ha que sendo 6 a taxa de partilha, a « totalidade das repartições correspondentes será igual á somma de tantos termos da serie dos numeros figurados de 4ª ordem, quantos os objectos a repartir mais um; que sendo 7 a taxa de partilha, a totalidade das repartições correspondentes será igual á somma de tantos termos da serie de numeros figurados de 5ª ordem,

quantos os objectos a repartir mais um; e assim por diante». Emfim, estes resultados não deixam a menor duvida sobre a connexão deste problema com o das combinações, onde vimos tambem surgirem as series dos numeros figurados. Aliás estas series acham-se ligadas de um modo mais systematico ao problema das repartições; não só pela uniforme participação do mesmo numero de termos em todos os casos, como tambem pela indicação da ordem correspondente, sempre igual á taxa de partilha menos dois.

160. — DA EXPRESSÃO NORMAL DA LEI DAS REPARTIÇÕES. —Os resultados precedentes, tornando cada vez mais evidente a analogia entre os dois problemas, nos fazem ao mesmo tempo antever a possibilidade de dar á lei das repartições uma expressão fraccionaria, á similhança da que foi estabelecida para a lei das combinações. Com effeito, a solução do problema das combinações, tendo mostrado a possibilidade de reduzir as longas e penosas addicções de termos daquellas series á divisão de um producto de factores consecutivos pelo producto de igual numero de termos da escala numerica, a analogia indica que o mesmo deve acontecer no caso das repartições. Todavia, essa inducção apenas resolve imperfeitamente a questão. Torna-se ainda necessario determinar o numero dos factores e o mais elevado, ou o mais fraco dentre elles; porquanto vimos que, apezar das series serem as mesmas, o numero de termos a considerar não se corresponde nos dois problemas.

Para attingir o nosso *desideratum*, reportemo-nos á theoria das combinações.

1° Tratando desta questão directamente, vimos que a totalidade das combinações 2 a 2 podia ser expressa pela somma de tantos termos consecutivos da escala numerica, quantos os objectos considerados menos um.

Como, porém, dissemos mais adiante que o mesmo numero de combinações era tambem representado por um

producto de dois factores consecutivos, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica, a consequencia é que aquella somma equivale a este quociente. Assim, por ex., o numero de combinações de 7 objectos 2 a 2, sendo expresso de um lado pela somma dos numeros 1, 2, 3, 4, 5 e 6, e de outro pelo quociente de 6 vezes 5 por 1 vez 2, resulta que 1 mais 2 mais 3 mais 4 mais 5 mais 6 é igual a

$$\frac{7 \text{ vezes } 6}{1 \text{ vez } 2},$$

ou a

$$\frac{6 \text{ vezes } 7}{1 \text{ vez } 2}.$$

Podemos, pois, concluir que « a somma dos termos da escala numerica, desde a unidade até um numero qualquer, é igual á metade do producto desse numero pelo que o segue immediatamente ».

Dahi resulta, portanto, a possibilidade de exprimir tambem sob fórma fraccionaria a totalidade das repartições de um numero qualquer de objectos quando a taxa é 3.

Assim, por ex., o numero de repartições de 5 objectos por 3 pessoas, que vimos ser igual á somma dos 6 primeiros numeros naturaes 1, 2, 3, 4, 5 e 6, será expresso similhantemente por

$$\frac{6 \text{ vezes } 7}{1 \text{ vez } 2};$$

o numero de repartições de 9 objectos, 3 a 3, será

$$\frac{10 \text{ vezes } 11}{1 \text{ vez } 2},$$

e assim por diante.

Pode-se, pois, concluir inductivamente que « a totalidade das repartições por 3 pessoas é expressa por uma fracção, cujo numerador é o producto de 2 factores consecutivos e crescentes, dos quaes o maior é o que succede immediata-

mente ao numero de objectos a repartir; e cujo denominador é o producto de igual numero de termos da escala numerica ».

2° Voltando ainda á theoria das combinações, vimos a principio que o numero de combinações 3 a 3 era equivalente á somma de tantos termos da serie dos numeros triangulares, quantos os objectos considerados menos dois. Vimos, porém, mais adiante, que o mesmo numero de combinações era expresso pelo producto de tres factores consecutivos e decrescentes, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica: a consequencia é que aquella somma equivale a este quociente. Assim, por ex., o numero de combinações de 7 objectos 3 a 3, sendo expresso de um lado pela somma dos cinco primeiros numeros triangulares 1, 3, 6, 10 e 15 e de outro, pelo producto de 7 vezes 6 vezes 5 dividido por 1 vez 2 vezes 3, resulta immediatamente que 1 mais 3 mais 6 mais 10 mais 15 é igual a

$$\frac{7 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 5}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3},$$

ou a

$$\frac{5 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 7}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3}.$$

Podemos, pois, concluir que «a sommma dos termos da serie dos numeros triangulares, desde o primeiro até um outro qualquer, é igual a um producto de tres factores consecutivos e crescentes, a partir do numero de ordem do ultimo termo, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica ».

Dahi resulta, pois, a possibilidade de exprimir, sob fórma fraccionaria, as repartições de um numero qualquer de objectos quando a taxa é 4.

Assim, por ex., o numero de repartições de 9 objectos por 4 pessoas, que vimos ser igual á somma dos 10 primeiros

numeros figurados de 2ª ordem ou triangulares, será similhantemente expresso por

$$\frac{10 \text{ vezes } 11 \text{ vezes } 12}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3};$$

o numero de repartições de 10 objectos por 4 pessoas será

$$\frac{11 \text{ vezes } 12 \text{ vezes } 13}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3};$$

e assim por diante.

Póde-se, pois, concluir que « a totalidade das repartições por 4 pessoas é expressa por uma fracção, cujo numerador é o producto de 3 factores consecutivos e crescentes, dos quaes o menor é o que succede immediatamente ao numero de objectos a repartir ; e cujo denominador é o producto de igual numero de termos da escala numerica ».

3º Voltando ainda á theoria das combinações, vimos que o numero de combinações, 4 a 4, era equivalente á somma de tantos termos da serie dos numeros pyramidaes triangulares, quantos os objectos considerados menos tres. Vimos, porém, mais adiante, que o mesmo numero de combinações era expresso pelo producto de 4 factores consecutivos e decrescentes, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica : a consequencia é que aquella somma equivale a este quociente.

Assim, por ex., o numero de combinações de 9 objectos 4 a 4, sendo expresso, de um lado pela somma dos seis primeiros numeros pyramidaes triangulares 1, 4, 10, 20, 35 e 56, e de outro pelo producto de 9 vezes 8 vezes 7 vezes 6 dividido por 1 vez 2 vezes 3 vezes 4, resulta immediatamente que 1 mais 4 mais 10 mais 20 mais 35 e mais 56, é igual a

$$\frac{9 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 7 \text{ vezes } 6}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4},$$

ou a

$$\frac{6 \text{ vezes } 7 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 9}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4}.$$

Podemos, pois, concluir que « a somma dos termos da serie dos numeros pyramidaes triangulares, desde o primeiro até um outro qualquer, é igual a um producto de 4 factores, consecutivos e crescentes, a partir do numero de ordem do ultimo termo, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica ».

Dahi resulta, pois, a possibilidade de exprimir sob fórma fraccionaria as repartições de um numero qualquer de objectos, quando a taxa é 5.

Assim, por ex., o numero de repartições de 9 objectos por 5 pessoas, que vimos ser igual á somma dos 10 primeiros numeros figurados de 3ª ordem ou pyramidaes triangulares, será similhantemente expresso por

$$\frac{10 \text{ vezes } 11 \text{ vezes } 12 \text{ vezes } 13}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4};$$

o numero de repartições de 10 objectos por 5 pessoas será

$$\frac{11 \text{ vezes } 12 \text{ vezes } 13 \text{ vezes } 14}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4};$$

e assim por diante.

Póde-se, pois, concluir que « a totalidade das repartições por 5 pessoas é expressa por uma fracção, cujo numerador é o producto de 4 factores consecutivos e crescentes, dos quaes o menor é o que succede immediatamente ao numero de objectos a repartir; e cujo denominador é o producto de igual numero de termos da escala numerica ».

Comparando as expressões fraccionarias obtidas para a totalidade das repartições nos casos em que a taxa de partilha é 2, 3, 4 e 5, já podemos induzir a lei geral para uma taxa qualquer. Para isso observemos: 1° que o re-

sultado é sempre uma expressão fraccionaria, cujo numerador é o producto de um certo numero de factores consecutivos e crescentes; e cujo denominador é o producto de igual numero de termos da escala numerica, a partir do primeiro; 2° que o numero de factores, que é o mesmo em ambos os termos da fracção, é dado pela taxa de partilha menos um; 3° que o menor factor do numerador é dado pelo numero de objectos a repartir mais um. Assim, por ex., o numero de repartições de 11 objectos por seis pessoas será

$$\frac{12 \text{ vezes } 13 \text{ vezes } 14 \text{ vezes } 15 \text{ vezes } 16}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4 \text{ vezes } 5}.$$

Chegamos, pois, a conclusão final de que « a totalidade das repartições quaesquer é expressa por uma fracção, cujo numerador é o producto de tantos factores consecutivos e crescentes, (a contar do numero que succede immediatamente ao de objectos a repartir), quantos são indicados pela taxa de partilha menos um; e cujo denominador é o producto de igual numero de termos da escala numerica, a partir do primeiro ». Este enunciado mostra ao mesmo tempo que, para passar de uma repartição qualquer á seguinte, basta multiplicar a expressão fraccionaria da primeira pelo numero que succede ao mais elevado dos factores do numerador e dividil-a pelo que se segue ao mais elevado do denominador. Assim do exemplo em que se determinou o numero de repartições de 11 objectos por 6 pessoas, passar-se-ha para o numero de repartições de 11 objectos por 7 pessoas, multiplicando a fracção obtida por $\frac{17}{6}$. Como o ultimo factor do denominador é igual á taxa de partilha menos um, e o ultimo do numerador é igual a este numero addiccionado ao de objectos a repartir, póde-se dizer que « para passar de uma repartição á seguinte, basta multiplicar a expressão respectiva pela somma dos

objectos a repartir com a taxa de partilha, e dividil-a pela mesma taxa ».

161. — Apreciação da reducção do problema das repartições ao das combinações.—As considerações feitas nos dois numeros precedentes, ao mesmo tempo que mostram a mais perfeita analogia entre os problemas das combinações e das repartições, fazem antever a possibilidade de exprimir estas por meio daquellas.

Para conceber similhante reducção, basta reflectir que uma expressão fraccionaria qualquer, nas condições a que acima nos referimos, póde ao mesmo tempo representar um certo numero de repartições e um outro numero de combinações. Ora, embora esses numeros sejam diversos, não é difficil apanhar a relação que os prende.

Tomando, por ex.,

$$\frac{10 \text{ vezes } 11 \text{ vezes } 12 \text{ vezes } 13 \text{ vezes } 14}{1 \text{ vez } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 4 \text{ vezes } 5},$$

vê-se que este quociente exprime ao mesmo tempo um numero de repartições de 9 objectos por 6 pessoas e o numero de combinações de 14 objectos 5 a 5. Multiplicando exemplos como este, seremos levados inductivamente a concluir que, para exprimir a totalidade das repartições quaesquer, por meio da lei das combinações, « toma-se para taxa de agrupamento a taxa de partilha menos um, e junta-se este numero ao de objectos considerados ».

Assim, por ex., o numero de repartições de 5 objectos por 3 pessoas equivale ao de combinação de 7 objectos 2 a 2; o numero de repartições de 5 objectos por 4 pessoas equivale ao de combinações de 8 objectos 3 a 3; o numero de repartições de 9 objectos por 5 pessoas equivale ao de combinações de 13 objectos 4 a 4; e assim por diante.

Emfim, sendo sempre possivel reduzir a enumeração das combinações á dos arranjos e á das permutações, con-

cluimos tambem a possibilidade de exprimir as repartições, já por meio destas, já por meio daquelles.

162. — SOBRE AS CONSEQUENCIAS GERAES DA THEORIA NUMERICA DA ORDEM. — Mais importantes do que as consequencias especiaes, que apenas têm uma influencia passageira, as consequencias geraes desta theoria perdurarão para sempre.

Ellas podem ser resumidas do seguinte modo :

1ª Efficacia da *inducção* no estudo da mathematica, que passa por ser meramente *deductivo*.

No paragrapho 13 vimos, com effeito, que foi a inducção que nos levou á instituição directa das leis das permutações, dos arranjos e mesmos das combinações.

2ª *Superioridade da inducção systematica sobre a inducção empirica*. Foi guiado por aquella que A. Comte fez entrar a solução do problema das repartições na das combinações, apezar de parecerem independentes. A constituição binaria das duas fórmulas correspondentes veio depois confirmar deductivamente (§ ι δ') suas previsões, sem que entretanto similhante confirmação fosse necessaria para autorisar o uso da descoberta inductiva.

3ª Esboço do *methodo constructivo* que, apezar de proprio ao dominio da Moral, póde ser artificialmente introduzido em Mathematica. Foi, com effeito, o methodo constructivo que nos levou aos enunciados definitivos das leis das permutações; permittindo ao mesmo tempo systematisar do modo mais conveniente toda a theoria de que nos occupamos.

Emfim, muitas outras consequencias poderiam ser mencionadas.

Como, porém, são menos importantes, nos limitamos a consignar aquella que « consiste em patentear a insufficiencia da ordem abstracta para guiar a existencia pratica, quando não se inspira na ordem concreta. Quando apenas se trata de combinar elementos, a abstracção satisfaz

plenamente, podendo-se mesmo dizer que só ella é efficaz. Mas como ella os póde combinar de um grande numero de maneiras, dahi resulta uma indeterminação invencivel. Só quando se tiver reconhecido a conveniencia entre uma das combinações abstractas e o fim a attingir, isto é, quando se houver tirado da ordem concreta motivos de exclusão para as outras, é que se poderá levantar similhante indeterminação.

E' assim, por ex., que a formação da escala encyclopedica das sete sciencias (Mathematica, Astronomia, Physica, Chimica, Biologia, Sociologia e Moral) pode ser abstractamente obtida de tantas maneiras distinctas, quantas são as permutações possiveis com sete objectos.

Ora, esse numero sendo expresso, como vimos, pelo producto dos sete primeiros termos da escala numerica, isto é, por 5040, a consequencia é que se póde dispor aquellas sciencias de 5040 maneiras differentes, e cada uma dessas classificações poderia ser justificada abstractamente por bôas razões.

Considerando-as em si mesmas, perder-se-hia o tempo em discussões indefinidas; porquanto cada uma é, a certos respeitos, superior a todas as outras, e lhes é inferior sobre outros pontos de vista.

Para saber si a classificação historica instituida por A. Comte deve ser finalmente adoptada, é preciso comparal-a com o conjuncto do seu systema.

Desde então se vê que ella se adapta com exclusão de todas as outras; e, para aquelles que estão convencidos da superioridade daquella doutrina, a classificação das sciencias não póde ser assumpto de discussão». (15a).

(15a). Pierre Laffite.—Calcul Arithmétique, leçons rédigées por M. Ch. Jeannolle. Rio de Janeiro 1880.

TERCEIRA PARTE

CAPITULO VI

Coordenação especial

Theoria do Calculo Fetichico : addicção, subtracção e multiplicação dos numeros inteiros

§ ις' (16)

Concepção geral das avaliações (16a)

163.—A numeração nos permitte resolver os problemas mais simples que a apreciação da ordem universal nos propõe, e que consiste em fixar os diversos grãos de coexistencia, abstrahindo dos attributos especificos dos objectos considerados. Mas, construida a escala arithmetica, o reconhecimento do grão que nella deve occupar uma pluralidade seria sujeito a frequentes enganos, si tivessemos em todos os casos de effectuar uma contagem directa do conjuncto. Além disso, em muitas circumstancias sabe-se como grupos parciaes contribuiram para formar um grupo total procurado. E utilisando-nos directamente da escala numerica para determinação deste ultimo, similhantes dados ficariam sem utilidade.

A medida dá logar a observações analogas ; porque a medida directa só rarissimas vezes é exequivel.

---

(16) Hekkaideka (dezeseis).
(16a) Notas tomadas no curso do cidadão R. Teixeira Mendes.

Na generalidade dos casos sabe-se, pelo contrario, e só é possivel saber-se como é que a grandeza que se deseja medir depende de outras já medidas ou de facil medição.

Em todas estas hypotheses surge, pois, o seguinte problema geral : *conhecidos varios numeros, e o modo pelo qual elles concorrem para a formação de um outro, determinar o ultimo sem effectuar uma contagem directa.*

A solução deste problema constitue o objecto das avaliações. Vê-se, pois, que as *avaliações* se propõem a attingir o mesmo objectivo que a numeração, seguindo uma marcha mais segura e mais rapida.

164.—**Ora**, tal é o campo das investigações numericas em que vamos entrar. A primeira vista elle parece indefinido, pois que as avaliações parecem variar indefinidamente.

Examinando, porém, o assumpto, a Humanidade reconheceu que a possibilidade de coordenal-o resulta do facto de todas as avaliações reduzirem-se ao concurso mais ou menos repetido, e mais ou menos variado de um pequeno numero de avaliações elementares. De sorte que um dominio que parece inesgotavel quando se considera no ponto de vista objectivo, torna-se de facil condensação quando é apreciado sob o aspecto subjectivo : Distinguindo, pois, as avaliações em *compostas e simples* ou *elementares*, o calculo arithmetico vae reduzir-se ao estudo destas ultimas, que comportam processos ou operações realmente distinctas. Estas avaliações são em numero de *cinco*, a saber: a *addicção*, a *subtracção*, a *multiplicação*, a *divisão* e a *extracção da raiz quadrada*. (16b).

Ellas formam historica e dogmaticamente duas categorias: a 1ª, devida ao fetichismo, compõe-se da *addicção*,

(16b) A elevação á potencia não constitue em Arithmetica uma avaliação distincta da multiplicação. Só em Algebra ella póde ser considerada como tal.

subtracção e *multiplicação*; a 2ª, elaborada pela theocracia, é constituida pela *divisão*, e *extracção* da *raiz quadrada*.

165.—LIGAÇÃO DAS OPERAÇÕES COM A NUMERAÇÃO.—A distincção dogmatica entre esses dois grupos patentea-se comparando a sua ligação com a numeração. Desde a sua constituição primitiva a numeração utilisou a *addicção* e logo depois a *subtracção*, conforme ainda hoje o attesta a numeração romana. A numeração systematica apenas manteve, porém, a primeira dessas operações.

Todavia, ella utilisou, tambem, a *multiplicação* e instituiu mesmo a noção de *potencia*, comquanto esta não désse logar em arithmetica a nenhuma operação distincta. (16c).

Na numeração fundamental não foi utilisada, porém, nem a *divisão* nem a *extracção de raiz*, que só indirectamente filiam-se a ella.

Com effeito, estas operações são o inverso das que a numeração utilisa.

Quando o desenvolvimento theorico da Humanidade levou a representar numericamente a série continua das grandezas, a divisão foi utilisada na constituição da escala numerica para dar-lhe a continuidade que a principio não tinha. (Instituição das fracções).

Mas esta utilisação é mais apparente do que real; pois que a escala dos numeros inteiros póde bastar para todas as hypotheses, escolhendo um modulo sufficientemente pequeno.

166.—Importa notar que estas observações conduziram a Humanidade a distinguir as avaliações elementares em *directas* e *inversas*. Simillhante distincção é puramente subjectiva, pois que as avaliações elementares podem todas ser directamente concebidas e comportam instituições directas.

(16c) Em cada algarismo de um numero, essas duas concepções de producto e de potencia acham-se necessariamente combinadas para precisar, de um lado o valor das unidades correspondentes, e do outro o resultado de sua collecção. (A. Comte. Synth. Subj.).

As conveniencias humanas é que determinaram a escolher umas para avaliações directas, e desde então a classificar as outras como inversas.

Examinando os motivos que determinaram a considerar, como directas, a addicção a multiplicação e a elevação a potencia; e como inversas, a subtracção, a divisão e a extracção de raiz, reconhece-se a sua filiação á nossa constituição moral. Pois que as avaliações directas caracterisam noções sympathicas de *união*, de *concurso*, de *convergencia*, ao passo que as avaliações inversas definem as noções antipathicas de *separação*, de *divergencia*, de *fragmentação*. A influencia desses attributos moraes é patente na constituição definitiva da escala numerica, cujos elementos tiveram todos uma origem sympathica, como vimos.

A escala numerica, porém, tendo utilisado a addicção, a multiplicação e a elevação a potencia, a sua constituição apresenta hoje um motivo theorico para a escolha das avaliações que devem ser consideradas como directas.

200.—No intuito de conceber os motivos dogmaticos que separam a divisão dos grupos formados pela addicção, subtracção e multiplicação, convém apreciar agora a filiação geral das avaliações para com a escala arithmetica.

Quando expuzemos esta escala, mostramos que a sua constituição fôra sobretudo solicitada pelas necessidades da *avaliação* e não da *contagem*. Mas a nossa attenção convergiu logo, especialmente, para o facto da representação de todos os numeros possiveis.

Devemos, pois, completar esta primeira indicação observando que a estructura da escala numeral visou mesmo, mais o calculo, do que a contagem. Com effeito, para contar, quaesquer signaes, phonicos ou graphicos, serviram como representantes dos numeros. A difficuldade de reter signaes desconnexos só se faz sentir depois que elles se multiplicam

muito. Ainda hoje vemos na numeração fallada, a maioria das pessoas não ligarem aos nomes dos numeros nenhuma ideia de filiação.

Mas, quando se trata do calculo, sente-se logo a importancia de representar todos os numeros por meio de alguns sufficientemente pequenos, e combinados da maneira mais simples. Porque, desde então, a estructura de cada numero já reduz espontaneamente qualquer calculo á combinação dos numeros por meio dos quaes todos os outros são formados: Assim, a numeração systematica representando um numero qualquer como decomposto em potencias successivas da base, sendo cada uma multiplicada por um factor inferior a 10, já reduz as avaliações ás combinações dos seus primeiros numeros. Ora, si essa decomposição não estivesse effectuada, o seu equivalente constituiria a maior difficuldade de cada avaliação. E' o que se póde reconhecer, vendo qualquer calculo feito segundo a notação usada pelos gregos, mesmo depois dos esforços de Archimedes e Appollonius.

Vê-se assim a importancia da instituição theocratica da numeração.

Si os numeros fossem representados por signaes arbitrarios, nenhum calculo poderia ser effectuado sinão pela contagem immediata. Ora, essa contagem não póde realizar-se com segurança a não ser para numeros sufficientemente pequenos.

Graças á constituição theocratica da numeração, a contagem directa fica reduzida a seus casos mais accessiveis. De sorte que as avaliações são instituidas, fazendo successivamente recahir os casos mais complicados nos mais simples do mesmo genero, até que a avaliação se torne assás elementar, para que o seu resultado seja determinado pela contagem immediata. A constituição da numeração theocratica guia essa serie de decomposições graduaes.

201. — Da apreciação que faremos da multiplicação, resultará que ella não deve ser separada do estudo da addicção e da subtracção na exposição didactica, comquanto um grande intervallo separe áquella do conjuncto formado por estas.

A maneira pela qual a numeração assiste ás tres operações é essencialmente a mesma, o que não acontece para a divisão.

Tal é o motivo pelo qual nos devemos occupar agora do conjuncto do calculo fetichico.

202. — Antes, porém, de abordal-o, devemos assignalar o plano geral do estudo das avaliações.

A. Comte designou a lição seguinte para a divisão, e as tres immediatas para o estudo do calculo fraccionario. Desde logo, uma lição apreciará a theoria da raiz quadrada, e cada uma das duas seguintes caracterisará a generalisação do espirito arithmetico, apreciando as simplificações que comportam os casos favoraveis das avaliações compostas. (Progressões arithmeticas e numeros figurados.)

A lição final resumirá o estudo feito e constituirá, assim, uma introducção para o estudo do calculo algebrico.

§ ι ζ' (17)

Theoria da addicção e da subtracção

203. — Concepção directa da addicção. — Conhecida a relação fundamental entre as avaliações e a numeração systematica, podemos agora instituir a theoria da addicção.

Concebida directamente, a addicção é a combinação numerica que tem por objecto, sendo dados dois numeros quaesquer, determinar um terceiro que se componha de

(17) Numero *heptakaidcka* (dezesete).

CORAÇÃO

tantas unidades, quantas existem naquelles. E' a principal e a mais simples das combinações numericas; e, como toda a combinação é a principio binaria, só devemos considerar nesta a intervenção dos dois numeros parciaes dados ou *parcellas*, que concorrem para a formação do numero total ou somma procurada.

A addicção de mais de dois numeros é, portanto, a reproducção do processo ou operação, em que se addiciona o 1° ao 2°, a sómma obtida ao 3° e assim por diante, praticando-se, por conseguinte, uma serie de *addicções successivas*.

204.— O PROCESSO ESPONTANEO: REALISAÇÃO DIRECTA DA ADDICÇÃO POR CONTAGEM; IMPOSSIBILIDADE PRATICA.—Por isso que toda addicção faz-se directamente entre dois numeros, é evidente que a operação póde ser espontaneamente realisada percorrendo na escala numerica, a partir de um delles, tantos gráos ascendentes, quantas são as unidades do outro; e desde que tal escala seja retida na memoria, bastará addicionar mentalmente ao maior dos numeros dados, uma a uma, as unidades que compõem o menor.

Comprehende-se, porém, que este processo espontaneo só é immediatamente applicavel no caso em que se trata de numeros pequenos; para numeros um tanto consideraveis, tornar-se-hia inexequivel na pratica e, demais, sujeito a erros. Dahi, pois, a necessidade de instituir um processo systematico para effectuar a avaliação num caso qualquer.

205.— REALISAÇÃO DA OPERAÇÃO SYSTEMATICA: CASO EM QUE ELLA SE FAZ POR CONTAGEM; CASO EM QUE EXISTE REALMENTE UMA OPERAÇÃO DISTINCTA DA CONTAGEM.— Todavia, é forçoso reconhecer que este modo espontaneo torna-se a base necessaria da operação, logo que esta é systematisada. Com effeito, os numeros dados podendo sempre ser decompostos em collecções de unidades de diversas ordens, de accôrdo com a numeração systematica, é obvio

que a sua addicção total poder-se-ha resolver em addicções parciaes relativas a taes unidades.

Obtidas assim as sommas das unidades correspondentes de diversas ordens que se conteem nos dois numeros, fica conhecida a somma destes. Ora, taes unidades sendo representadas por numeros simples ou inferiores á base, percebe-se que a questão reduz-se, em ultima analyse, a praticar taes addicções elementares, sempre possiveis pelo processo espontaneo. Eis como as addicções de numeros quaesquer ficam normalmente reduzidas ás dos numeros inferiores á *base*. Uma tal reducção permitte então empregar sem difficuldade o processo natural ou espontaneo, que jámais deixará de ser o unico applicavel ás addicções verdadeiramente elementares, isto é, dos numeros *simples*. Seu uso produzindo resultados pouco numerosos, estes podem sempre ser retidos de memoria, como acontece no systema decimal.

Para um outro systema qualquer com que não estejamos familiarisados, é sempre facil reproduzil-os mediante a contagem directa.

Do exposto podemos, pois, concluir que dois são os casos a considerar na addicção: o da *addicção de numeros simples*, que não exige nenhum processo ou operação especial, por isso que se effectua por contagem directa; e o da *addicção de numeros compostos*, que demanda realmente a *operação citada*, reduzindo-se por esse modo ao precedente.

Para melhor comprehensão do que fica dito, supponhamos, por ex., que se trata de addicionar o numero decimal 654 a 321. O primeiro decompondo-se em 4 unidades, 5 dezenas e 6 centenas, e o segundo em 1 unidade, 2 dezenas e 3 centenas, é evidente que teremos a somma procurada, effectuando as tres addicções parciaes de 4 a 1, o que dá 5; de 5 a 2, o que dá 7; e, finalmente, de 6 a 3,

o que dá 9. Assim, o numero pedido compõe-se de 5 unidades, 7 dezenas e 9 centenas : é, pois, 975.

Para facilitar as addicções parciaes das unidades da mesma especie, costuma-se dispôr o calculo de modo que ellas se correspondam verticalmente, separando ainda as parcellas da somma por um traço horisontal, afim de não confundil-as.

Eis o typo do calculo:

$$\begin{array}{r} 654 \\ 321 \\ \hline 975 \end{array}$$

Supponhamos ainda que se trata de obter a somma de 56 e 97. Addiccionaremos 6 unidades a 7, o que dá 13; e 5 dezenas a 9, o que produz 14 dezenas ou 140 unidades; de modo que 56 mais 97, é o mesmo que 13 mais 140.

Addiccionando agora as unidades da mesma denominação nestes dois numeros, e cujas sommas não attingem a 10, obteremos finalmente 153 para o resultado procurado.

Para determinal-o, foi-nos necessario effectuar duas operações, que seria commodo reduzir a uma unica.

Para isso notemos que depois de haver obtido as 13 unidades da 1ª addicção parcial, não ha mais unidades a considerar; e podemos então escrever 3 unidades, restando 1 dezena que guardaremos *mentalmente* para addiccionar depois ao resultado 14, fornecido pela addicção parcial das dezenas, o que produz 15 dezenas. A somma procurada compõe-se, pois, de 15 dezenas e 3 unidades, sendo, portanto, 153.

Eis o typo do calculo, ao lado do qual apresentamos um outro similhante, no systema septimal :

$$\begin{array}{r} 56 \\ 97 \\ \hline 153 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 654 \\ 321 \\ \hline 1305 \end{array}$$

Vê-se, portanto, que, si em qualquer das addicções parciaes a somma obtida attingir ou exceder a base adoptada, convém guardar mentalmente a unidade de ordem superior assim formada, para addiccional-a á somma fornecida pela addicção parcial seguinte, das unidades dessa ordem.

O *calculo mental* introduz assim um importante aperfeiçoamento na addicção, permittindo que em casos como este possamos realisal-a com uma unica operação para cada especie de unidades.

Emfim, é ainda a numeração que nos guia aqui na pesquiza do resultado; porque, segundo ella, na somma procurada, como em um numero qualquer, as unidades de cada ordem são sempre expressas por um só algarismo, por serem inferiores á base adoptada.

Nos exemplos acima, assim como começamos as addicções parciaes pelas unidades inferiores, poderiamos fazel-o, partindo das superiores. Entretanto, a addicção das unidades inferiores influindo, como acabamos de vêr, sobre a das superiores, sempre que a respectiva somma fôr 10 ou superior a 10, não teriamos immediatamente o algarismo definitivo dos resultados correspondentes, quando praticassemos as operações, partindo das unidades mais elevadas.

Procedendo, ao contrario, póde-se depois de cada somma, reservar as unidades de ordem superior que d'ahi provierem para juntal-as mentalmente á somma seguinte. E' o que fizemos nos 2º e 3º dos exemplos acima; devendo-se notar que no anterior (1º) a ausencia de *reservas* torna indifferente começar-se o calculo pela direita ou pela esquerda.

Quando se tem de effectuar diversas addicções successivas, em vez de addiccionar separadamente o 1º numero ao 2º, a somma obtida ao 3º e etc., conforme dissemos,

póde-se abreviar os calculos procedendo de accordo com a seguinte regra:

Escrevem-se todas as parcellas umas por baixo das outras, de maneira que as unidades da mesma ordem fiquem em uma columna vertical, e traça-se por baixo de todas uma linha horisontal. Sommam-se mentalmente as unidades de 1ª ordem das duas primeiras parcellas; a esta somma juntam-se as unidades da 3ª parcella; e assim seguidamente até as unidades de 1ª ordem da ultima parcella; e ter-se-ha obtido mentalmente a somma das unidades de 1ª ordem de todas ellas. Por baixo da linha horisontal e da columna vertical de taes unidades escreve-se a sua somma, si ella não exceder de 10; mas, si exceder, escrever-se-ha sómente o algarismo das unidades de 1ª ordem, conservando o seguinte de memoria para juntal-o ás unidades de 2ª ordem das parcellas. Sobre taes unidades praticar-se-ha do mesmo modo, e assim seguidamente até a ultima columna vertical da esquerda, cuja somma escrever-se-ha toda. Assim resultará a somma procurada, que fica escripta em linha horisontal por baixo do traço.

Com effeito, nesta somma reuniram-se as unidades de 1ª, 2ª, 3ª, etc., ordens de todas as parcellas, e, em consequencia, todas ellas.

Não ha duvida que a operação póde ser praticada sem dar ás parcellas as disposições que acabamos de mencionar. Mas, assim procedendo, attendemos a uma dupla vantagem, pratica e moral: Praticamente, já vimos que a operação se realisa com mais facilidade, graças ao seu aperfeiçoamento pelo calculo mental; e sob o ponto de vista moral desenvolvemos a nossa veneração para com a série de antepassados, que nunca procederam de outro modo.

Eis o typo dos calculos praticados em duas séries de addicções successivas, a 1ª no systema decimal e a 2ª no septimal:

925	385
326	426
430	234
725	513
2406	2134

Emfim, a necessidade de nos premunirmos contra os erros, porventura commettidos, leva-nos de ordinario a tirar a *prova* da operação, isto é, a verificar os resultados, antes de acceital-os como exactos.

O meio que para esse fim se offerece espontaneamente é repetir a operação. Como, porém, o habito póde nos levar á reproducção do erro, convém que se faça a segunda addicção em sentido inverso, isto é, de baixo para cima. A ordem das parcellas não alterando evidentemente a somma respectiva, esta deverá coincidir com a primeira. Si isto se der, é provavel que a operação esteja certa; porque devemos suppôr que não tenha havido erro num resultado obtido por caminhos diversos.

Todavia, a *prova* mais racional da addicção pratica-se pela subtracção, como adiante veremos.

206. — A CONCEPÇÃO DA SUBTRACÇÃO COMO OPERAÇÃO DIRECTA E DEPOIS COMO INVERSA DA ADDICÇÃO: RESTO, EXCESSO E DIFFERENÇA. — Concebida directamente, a subtracção é a combinação numerica que tem por fim decompor um numero por meio de outro, tirando daquelle todas as unidades deste, para formar um numero procurado.

O primeiro destes numeros é por isso chamado *minuendo* e o segundo *minuidor* ou *subtrahendo*, dando-se ao procurado a denominação de *resto*.

Como o maior dos numeros dados é evidentemente igual ao menor addiccionado ao que resta da subtracção, segue-se que o minuendo é a somma do subtrahendo com o resto procurado; e reciprocamente, este ultimo é igual ao numero que addiccionado ao subtrahendo produz uma somma igual ao minuendo. Vê-se, assim, que a *subtracção*

póde tambem ser concebida como uma avaliação inversa da addicção. Neste caso, podemos definil-a como tendo por objecto determinar o *excesso* de um numero sobre outro, e por isso o resultado da operação é aqui chamado *excesso.*

Considerada, pois, sob esses dois aspectos, a subtracção tem por objecto determinar o que resta de um numero quando delle subtrahimos um menor, ou o numero que representa o excesso do maior sobre o menor; e o resultado da operação chama-se tambem *differença* entre esses numeros, que são denominados termos da differença.

As considerações precedentes nos mostram que as palavras *resto*, *excesso* e *differença*, que são indistinctamente applicadas como synonymas ao resultado da operação, representam, de facto, noções distinctas.

Vimos, com effeito, que se chama *resto* ao resultado da operação, quando se tem em vista tirar um numero menor de outro maior, o que, aliás, está de accôrdo com a accepção vulgar da palavra, porque *resto* é o que *sobra*; *excesso* é o resultado da operação quando se tem em vista juntar ao menor dos numeros dados o que lhe é preciso para completar o maior.

Emfim, *differença* é uma palavra mais abstracta, que serve apenas para assignalar a desigualdade dos numeros dados, sem fixar a attenção sobre a ordem das respectivas grandezas; e, portanto, tendo em vista simplesmente a *relação* arithmetica existente entre ambos, chamada, por isso, *relação por differença*.

210. — Caso em que a operação se realisa por contagem: 1° como operação directa, 2° como operação inversa da addicção. Impraticabilidade. — As duas definições acima nos mostram que, como a addicção, póde a subtracção ser tambem realisada mediante simples contagem: Considerada como operação directa, bastaria, para realisal-a, percorrer na escala numerica, a partir do maior

dos numeros dados, tantos gráos descendentes quantas fossem as unidades do menor; e o numero assim obtido seria o *resto* procurado.

Encarada como operação inversa da addicção, bastaria, ao contrario, percorrer na escala numerica, a partir do menor dos numeros dados, tantos gráos ascendentes quantos fossem precisos para attingir o maior; e o resultado obtido representaria o excesso deste sobre aquelle.

Comprehende-se, porém, que, apezar da sua espontaneidade, similhante processo só poderia ser applicado, tratando-se de numeros muito pequenos; tornando-se inexequivel e sujeito a erros quando os numeros dados fossem um tanto consideraveis, e estivessem muito distantes na escala. Dahi, pois, a necessidade de instituir um processo systematico para realisar a operação num caso qualquer.

211. — A OPERAÇÃO SYSTEMATICA: CASO EM QUE ELLA SÓ PÓDE SER FEITA PELA CONTAGEM; CASO EM QUE EXISTE REALMENTE UMA OPERAÇÃO DISTINCTA DA CONTAGEM. — Cumpre, todavia, reconhecer que, apezar de defeituoso, este modo natural é o unico de que se dispõe para realisar a operação no caso elementar em que os numeros dados são *simples*, isto é, inferiores á base numeral adoptada. Além disso, elle serve de fundamento ao caso mais complexo em que os numeros dados são *compostos*; e a operação systematica consiste aqui, como na addicção, em fazer depender o caso mais complicado do mais simples, segundo o espirito geral das soluções mathematicas.

Para instituil-a, basta reconhecer que os numeros dados podem ser decompostos em collecções de unidades de diversas ordens, de accôrdo com a numeração, e que, portanto, para subtrahir um do outro bastará effectuar as subtracções parciaes relativas ás unidades correspondentes das referidas ordens.

Ora, estas unidades sendo expressas por numeros simples, vê-se que a questão reduz-se, em ultima analyse, a praticar taes subtracções elementares, sempre possiveis pelo processo espontaneo, isto é, pela contagem.

A operação total decompõe-se, portanto, em subtracções parciaes relativas a numeros simples, cujos resultados, sendo pouco numerosos, podem ser facilmente retidos de memoria; podendo-se tambem obtel-os por uma simples inversão mental dos que lhe correspondem na addicção.

1.º Processo como operação directa distincta da addicção. — Para melhor comprehensão do que fica dito, supponhamos que se trata de subtrahir 321 de 975, no systema decimal.

Como o primeiro numero compõe-se de 1 unidade, 2 dezenas e 3 centenas, emquanto que o segundo contém 5 unidades, 7 dezenas e 9 centenas, tiraremos 1 unidade de 5, 2 dezenas de 7 e tres centenas de 9.

Ora, 5 *menos* 1 sendo 4; 7 *menos* 2 sendo 5, e 9 *menos* 3 sendo 6, obteremos successivamente 4 unidades, 5 dezenas e 6 centenas. Assim, o *resto* procurado é 654. Note-se que neste exemplo effectuamos a subtracção, considerando-a como operação directa, distincta da *addicção*. Todavia, cumpre reconhecer que, sendo qualquer dos algarismos do minuendo menor do que o seu correspondente do minuidor, ella não póde dispensar o concurso da addicção, a menos que não se queira recorrer á contagem.

Nesse caso, para obter o resultado, é preciso *addiccionar* ao algarismo em questão 10 unidades da mesma ordem, embora para compensar esse accrescimo se deva subtrahir 1 unidade de ordem immediatamente superior ao algarismo seguinte do mesmo minuendo. Assim, tendo de subtrahir 385 de 746, tiramos 5 unidades de 6, o que dá 1 de resto; como, porém, não é possivel tirar 8 dezenas de 4, addiccionamos a estas ultimas 10 unidades de

2ª ordem e, das 14 dezenas assim obtidas, tiramos as 8, o que dá 6 de resto; emfim, para compensar o accrescimo assim feito ao minuendo, subtrahimos 1 centena (que vale 10 dezenas) do seu algarismo seguinte, de modo que tiramos afinal, 3 de 6, o que dá 3.

O resto compõe-se, pois, de 3 centenas, 6 dezenas e 1 unidade, sendo portanto 361. O que fizemos não foi mais do que modificar o modo usual de decompor os numeros.

Assim, em vez de considerar o numero 746 composto de 7 centenas, 4 dezenas e 6 unidades, suppomol-o formado de 6 centenas 14 dezenas e 6 unidades, o que, evidentemente, não o altera; porque, si o diminuimos de uma centena, o augmentamos, em compensação, de 10 dezenas. Similhante modificação reduz este caso da subtracção ao precedente, em que todos os algarismos do minuendo são superiores aos do minuidor.

Si no minuendo houver mais de um algarismo menor que os correspondentes do subtrahendo, bastará reproduzir o mesmo artificio para cada um delles; e si o algarismo seguinte fôr zero, recorrer-se-ha ao immediato.

E' o que fazemos nas subtracções seguintes nos systemas decimal e septimal, onde, para maior facilidade das subtracções parciaes, collocamos o minuidor por baixo do minuendo, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam:

62052	62052
42342	42342
19710	16410

A transformação precedente redobra-se a cada zero que figurar no minuendo; porque, onde estiver zero, teremos de collocar 10, o que exige que em troca diminua-se de uma unidade o primeiro algarismo seguinte, desde que este seja differente de zero. Si os zeros fôrem seguidos, olhar-se-ha o

1° como valendo 10, e os demais como representando o numero immediatamente inferior a 10; terão, porém, todos este ultimo valor, se succederem a um algarismo significativo, inferior ao que lhe corresponder no subtrahendo.

E' o que se vê nas subtracções seguintes effectuadas, as duas primeiras no systema decimal e as duas outras no septimal:

39910	*499912*	*36610*	*466612*
40005	50002	40005	50002
26453	43546	26453	43546
13552	06456	10222	03123 .

Outro modo. — A addicção póde, em similhante caso, intervir de um outro modo na determinação do resto.

Com effeito, na 1ª das subtracções acima (385 de 746), depois de ter addiccionado 10 unidades ao algarismo 4 do minuendo, póde-se, em vez de diminuir de uma unidade de ordem superior o seu immediato, 7, addiccionar do mesmo modo 1 unidade ao que lhe corresponde no subtrahendo, isto é, a 3. Assim tiraremos 5 de 6, 8 de 14, e 4 de 7, por isso que juntamos uma unidade ao algarismo 3, sem desfalcar o 7 do minuendo. Esta segunda addicção, feita ao subtrahendo, equivale á subtracção que fazemos acima, no algarismo correspondente do minuendo; e, aqui, as duas operações identicas praticadas sobre os algarismos correspondentes do subtrahendo e do minuendo, compensam-se do mesmo modo que as duas inversas praticadas alli sobre este ultimo.

Tendo, por exemplo, de subtrahir 125 de 232, podemos tornar possivel a subtracção parcial dos algarismos das unidades, juntando 10 ás 2 do minuendo, o que dá 12 unidades: subtrahiremos pois 5 de 12, o que dá 7 de resto. Para compensar aquelle accrescimo, augmentaremos tambem de 1 dezena o algarismo 2 do subtrahendo, o que dá 3; subtra-

hiremos, portanto, 3 de 3, e finalmente 1 de 2. O resultado é, pois, 107.

O que acabamos de fazer, importa em augmentar simultaneamente de 10 o minuendo e o minuidor ou subtrahendo, antes de effectuar a subtracção; sendo que, no primeiro, o accrescimo faz-se sobre o algarismo das unidades, e, no segundo, sobre o das dezenas.

Em geral, póde-se dizer que *a differença entre dois numeros não se altera, quando os augmentamos ou quando os diminuimos simultaneamente de uma mesma quantidade.* Com effeito, segundo a definição, a *differença* entre dois numeros indica o gráo de sua desigualdade, isto é, de quanto um é maior de que o outro, ou este é menor do que aquelle. Augmentando, pois, o maior numero de uma certa quantidade, a differença ficará augmentada dessa quantidade; si, ao contrario, sem alterar o maior numero, augmentarmos o menor daquella quantidade, a differença ficará diminuida da mesma.

Por conseguinte, fazendo igual accrescimo em ambos os numeros, a differença ficará ao mesmo tempo augmentada e diminuida da mesma quantidade e, portanto, não soffrerá alteração. (17a).

2º Processo da subtracção, como inversa da addicção. —Já dissemos que a subtracção, considerada como inversa da addicção, propõe-se a determinar o *excesso* de um numero sobre outro, ou, o que é o mesmo, a conhecer uma

(17a) Acabamos de vêr que *a differença entre dois numeros não se altera quando augmentamos simultaneamente o maior e o menor de uma mesma quantidade.* Ora, si esta quantidade fôr o proprio numero maior, os dois termos da differença ficarão sendo, respectivamente, o maior mais o maior, ou duas vezes o maior dos numeros dados; e o menor mais o maior, ou a somma dos mesmos numeros, sem que a differença se altere.

Podemos, pois, concluir que a *differença entre dois numeros é igual ao dôbro do maior menos a sua somma; e inversamente, que a somma de dois numeros addiccionada á sua differença, é igual ao dôbro do maior.*

Este theorema numerico, que nos fornece um processo indirecto para determinar a *differença* entre dois numeros, por meio de sua somma e do *maior*, nos deverá servir no estudo do *Calculo Algebrico.*

das parcellas de uma somma, quando esta e a outra parcella são dadas.

Empiricamente, este excesso poderia ser obtido por meras tentativas, procurando, successivamente, qual o numero que, addiccionado á parcella dada, produzisse a somma conhecida. Attendendo, porém, aos inconvenientes deste modo espontaneo, vejamos o processo systematico que convém applicar.

Por isso que o minuendo deve ser a somma do minuidor com o numero procurado, é obvio que as suas unidades de diversas ordens devem resultar da somma das unidades correspondentes do minuidor com as que devem compôr o excesso procurado. Assim, pois, a questão reduz-se a vêr quaes as unidades de 1ª, 2ª, 3ª.... ordens que, addiccionadas ás correspondentes do minuidor, produzirão as que lhes correspondem no minuendo. Ora, taes unidades sendo expressas por numeros simples, a operação total resolve-se numa serie de addicções parciaes relativas a taes numeros, e cujos resultados, pouco numerosos, podem ser obtidos invertendo mentalmente os da addicção dos numeros simples.

Si tivermos, por exemplo, de subtrahir 325 de 756 diremos: 5 para 6, 1; 2 para 5, 3, e 3 para 7, 4. Assim 1, 3 e 4 são respectivamente as unidades de 1ª, 2ª e 3ª ordens que precisamos addiccionar ás correspondentes do minuidor, para obter as relativas ao minuendo; sendo, pois, 431 o *excesso* deste sobre aquelle.

No caso mais complicado, em que existem no minuendo um ou mais algarismos inferiores aos correspondentes no minuidor, a questão reduz-se ao caso precedente pelo modo acima exposto; isto é, augmentando simultaneamente de 10 o algarismo considerado do minuendo e de 1 unidade de ordem superior o que no subtrahendo corresponde ao seu immediato.

Assim, tendo de subtrahir 456 de 738, diremos: 6 para 8, 2; 5 para 13, 8; ha 1 e 4, 5 para 7, 2. O resultado é, pois,

282. E para obtel-o, tivemos de addiccionar 10 unidades de 2ª ordem ao minuendo, e 1 de 3ª ao minuidor; o que, confórme dissemos, em nada os altera.

Si tivermos ainda de subtrahir 34324 de 60005, diremos: 4 para 5, 1; 2 para 10, 8; ha 1 e 3, 4 para 10, 6; ha 1 e 4, 5 para 10, 5; ha 1 e 3, 4 para 6, 2. O excesso procurado é, pois, 25681.

Eis o typo do calculo, que fazemos tambem no systema septimal, onde, em logar de *dez*, deve-se ler *sete*:

60005	60005
34324	34324
25681	22351

Do exposto, resulta que a subtracção realiza-se mais facilmente quando a consideramos como inversa da addicção. Demais, assim concebida, ella offerece a vantagem dogmatica de filiar-se immediatamente á operação anterior. Emfim, similhante modo fornece o meio mais simples de verificar a operação. Porque, segundo a definição, a somma do resultado obtido com o minuidor, deve produzir o minuendo, si não houver erro; salvo si este fôr o mesmo nas duas operações, o que raramente se dá.

Reciprocamente, a subtracção póde tambem servir para verificar a addicção. Porque, si um numero addiccionado a outro produz uma certa somma, é claro que, si desta subtrahirmos um daquelles numeros, obteremos o outro. Assim, pois, para verificar o resultado da addicção de dois numeros, bastará subtrahir um delles da somma, e o resultado deverá produzir o outro, si não houver erro na operação.

Tratando-se da somma de diversos numeros, de tres por exemplo, a mesma verificação poderá ser realizada; porque, subtrahindo um delles da *somma* dos tres, o resto

deverá ser igual á somma dos dois restantes. De outra sorte seria preciso que nos houvessemos enganado em duas destas operações e que os erros se tivessem compensado, o que não é provavel.

Póde-se tambem fazer a prova de outro modo, que consiste em subtrahir, successivamente, da somma dos numeros addiccionados, todas as partes desses numeros; e si a operação foi bem feita, não deve-se encontrar nenhum resto. Para isto podemos construir a seguinte regra:

Somma-se a primeira columna da esquerda, subtrahe-se o resultado da parte correspondente da somma total, escreve-se o resto por baixo, colloca-se-lhe á direita o algarismo seguinte da somma total; e, do resultado, subtrahe-se a somma da columna seguinte. Continúa-se do mesmo modo; si o ultimo resto fôr zero, é provavel que a operação esteja certa.

Com effeito, as differenças achadas são as reservas provenientes da columna immediata á direita, as quaes foram transportadas para a columna considerada; e como a columna das unidades não recebe reservas, deve a ultima differença ser zero. No exemplo seguinte tiramos as duas provas:

5421	5421
———	4534
4534	6355
6355	9876
9876	———
———	26186
26186	21
20765	18
———	16
5421	0

3º Processo, pela addicção dos complementos arithmeticos. — Ha uma outra maneira de effectuar a operação que, com o habito, póde tornar-se mais commoda do que a ordinaria, sobretudo tratando-se de numeros de muitos algarismos. Consiste em mudar a subtracção em

addicção, tomando o *complemento* de cada algarismo do numero que deve ser subtrahido, a principio para 10, e em seguida para 9. Supponhamos, por exemplo, que se trata de subtrahir 3728 de 8376. Diremos: 2 (complemento de 8 para 10) e 6 são 8, e escrevemos 8; 7 (complemento de 2 para 9) e 7 são 14, escrevemos 4, e retemos 1; 2 (complemento de 7 para 9) e 3 são 5, com 1 de reserva são 6 que escrevemos; 6 (complemento de 3 para 9) e 8 são 14; escrevemos 4 e desprezamos 1, por causa da dezena de milhar que tomamos a mais no curso da operação.

$$\begin{array}{r} 8376 \\ 3728 \\ \hline 1)4648 \end{array}$$

E' facil de justificar este processo: vê-se, com effeito, que estes differentes complementos formam o complemento total do subtrahendo 3728, isto é, 6272, numero que lhe falta para completar 10000; de sorte que tudo se passa como si ajuntassemos 10000 ao numero maior, e do resultado tirassemos o menor. Ora, como vimos, que aquelle accrescimo ao minuendo importa num augmento equivalente ao resto da subtracção, tivemos que desfalcar este ultimo de uma unidade de sua ordem mais elevada.

Dahi se infere que, para fazer a subtracção por meio dos complementos, basta *addiccionar successivamente ao minuendo o complemento arithmetico do subtrahendo, e supprimir no resto uma unidade da ordem mais elevada.* Quando se allude ao complemento arithmetico de um numero sem indicar o outro que elle deve completar, subentende-se que este ultimo equivale a 10 unidades da ordem mais elevada do primeiro. De sorte que, *para obter immediatamente o complemento arithmetico de um numero, basta subtrahil-o do numero formado pela unidade seguida de tantos zeros, quantos algarismos que elle contém.* Utilisando

a regra acima, para subtrahir 4325 de 6532 no systema septimal, teriamos

$$\begin{array}{r} 6\,5\,3\,2 \\ 4\,3\,2\,5 \\ \hline 1)2\,2\,0\,4 \end{array}$$

Onde tomamos o complemento de 5 para 7 e o addiccionamos a 2, e em seguida os complementos de 2, 3 e 4 para 6, e os reunimos aos algarismos correspondentes do minuendo. Supprimindo no resultado uma unidade de 5ª ordem, obtem-se o resto 2204.

212.—OPERAÇÃO INVERSA DA SUBTRACÇÃO. COMPARAÇÃO DA ADDICÇÃO COM A SUBTRACÇÃO QUANTO Á FACILIDADE.—Tratando da subtracção como operação directa e distincta da addicção, dissemos que ella não dispensava o concurso desta ultima, no caso em que um ou mais algarismos do minuendo fossem menores do que os correspondentes do minuidor, a não ser que quizessemos recorrer á contagem. Cumpre agora accrescentar que em tal caso poder-se-hia tambem deixar de recorrer directamente á addicção, desde que considerassemos esta como uma operação inversa da subtracção.

Assim concebida, a *addicção teria por fim, dados dois numeros, achar um terceiro do qual, subtrahindo um daquelles, ficasse de resto o outro*. De sorte que, na subtracção alludida (385 de 746), em vez de addiccionar directamente 10 a 4 para tornal-a possivel, fal-o-hemos indirectamente, procurando qual o numero de que subtrahindo 10 restam 4, e o resultado seria do mesmo modo 14.

Tendo, por exemplo, de addiccionar 56 a 93, em vez de dizermos 6 e 3 são 9, e 5 e 9 são 14, diremos: *o numero do qual subtrahindo 9 fica de resto 5, é 14*; de modo que chegamos ao mesmo resultado 149.

Comquanto similhante maneira de proceder a addicção seja mais difficil do que a usual, devemos consignal-a aqui pela vantagem logica que offerece, mostrando a relatividade de nossas concepções e a consequente necessidade do ponto de vista humano ou subjectivo, para construir as nossas theorias quaesquer (*methodo constructivo*).

Emfim, para terminar a theoria da addicção e da subtracção, resta-nos sómente comparar essas duas operações quanto á sua facilidade. Ora, as considerações que temos feito precedentemente, não deixam a menor duvida de que a subtracção é mais difficil do que a addicção. O triplice nome do resultado daquella operação mostra-nos logo a sua maior complexidade sobre esta. Demais, reduzida como a addicção, a não exigir realisação directa senão para os numeros de um só algarismo, ella offerece, comtudo, maior difficuldade de execução, porquanto exige que se modifique o modo usual de decompor os numeros, quando um ou mais algarismos do minuidor excedem aos correspondentes do minuendo.

Neste caso, á similhança do que acontece na addicção, quando a somma das unidades de cada especie attinge ou excede a base numeral, é sempre preferivel realisar a subtracção, a partir das unidades mais fracas.

Só assim será possivel augmentar 10 unidades ao citado algarismo do minuendo (em troca de uma unidade superior quer desfalcada ao mesmo minuendo, quer augmentada ao subtrahendo), sem que seja preciso corrigir um algarismo já escripto no resto ou excesso, quando tivessemos começado a operação pelas unidades mais fórtes. Sómente quando não houver no minuendo nenhum algarismo inferior ao que lhe corresponde no minuidor, é que não haverá inconveniente em começar a operação pela esquerda, á similhança do que acontece na addicção, quando a somma das unidades de cada especie não

excede ao numero immediatamente inferior á base adoptada. (17b).

Além desses pontos de contacto entre a addicção e a subtracção, devemos notar sobretudo que a numeração intervem do mesmo modo na realisação de ambas, pela decomposição que permitte aos numeros dados. Emfim, embora a realisação seja mais difficil para a subtracção, cumpre reconhecer que esta é mais isenta dos embaraços do calculo; por isso que seus resultados elementares podem sempre ser obtidos invertendo mentalmente os da addicção, sem recorrer á contagem.

Tal é a apreciação que deviamos fazer das duas mais simples combinações numericas, que podem ser finalmente olhadas como prolongamento normal da numeração systematica. Dellas derivám todas as outras, porquanto veremos

---

(17b) Para que a subtracção podesse sem inconveniente, ser effectuada da esquerda para a direita, seria preciso reduzir a este caso todos aquelles em que no minuendo existissem algarismos inferiores aos correspondentes do subtrahendo.

E' o que conseguiriamos evidentemente, decompondo o minuendo em duas partes taes, que uma dellas sómente tivesse algarismos superiores aos correspondentes no minuidor.

Subtrahido este de similhante parte, bastaria addiccionar a outra ao resto obtido, para ter na somma achada o resultado procurado. Assim, no exemplo acima, para subtrahir 34324 de 60005, decomporemos este numero em 59999 mais 6; sutrahiremos 34324 de 59999, o que dá de resto 25675; e emfim juntaremos a este, 6, o que produzirá 25681 para resultádo procurado. (No systema septimal a decomposição de 60005 seria em 56666 mais 6).

Poder-se-hia tambem decompor o subtrahendo em duas partes taes, que uma dellas sómente contivesse algarismos inferiores aos correspondentes do minuendo; e subtrahida esta, seria preciso ainda subtrahir a outra do reste obtido.

Todavia, este segundo modo não é preferivel ao precedente, porque poderia exigir decomposição analoga na segunda subtracção. Vê-se, emfim, que embora num e noutro modo a subtracção podesse ser praticada da esquerda para a direita, ella exigiria sempre duas operações pelo menos, o que a tornaria mais longa do que sendo effectuada em sentido contrario.

Além das vantagens logicas, as considerações que acabamos de fazer nos mostram: 1º, *Que tendo de subtrahir um numero da somma de dois outros, bastará subtrahil-o do maior, e ao resultado obtido addiccionar o menor;* 2º, *Que tendo de subtrahir de um numero a somma de dois outros, poder-se-ha subtrahir delle o primeiro, e do resultado obtido subtrahir o segundo*. Si em vez de uma *somma*, quizessemos subtrahir de um numero a *differença* entre dois outros, bastaria subtrahir o *maior* destes, e addiccionar ao resultado obtido o *menor*. Porque, subtrahindo apenas o *maior* teriamos de *mais* uma quantidade igual ao *menor;* e o resto ficaria, por conseguinte, *diminuido* dessa quantidade; para que se torne verdadeiro, será preciso, portanto, juntal-a a elle.

que assim como a addicção successiva de uma mesma parcella produz a multiplicação, similhantemente a subtracção successiva do mesmo minuidor produz a divisão. E, como da *multiplicação* deriva a *potenciação*, e á divisão filia-se a *radiciação* do segundo gráo (*extracção da raiz quadrada*), seremos levados a concluir que todas as combinações numericas podem ser condensadas na addicção e na subtracção.

§ ιη' (18)

Theoria da multiplicação

213. — A CONCEPÇÃO ARITHMETICA DA MULTIPLICAÇÃO. FILIAÇÃO PARA COM A SOMMA; COMPARAÇÃO COM A DIVISÃO. Concebida arithmeticamente (18a), a multiplicação apresenta-se como um caso particular da addicção. Dissemos no paragrapho precedente que toda addicção faz-se immediatamente entre duas parcellas; todavia, vimos que a existencia de muitas parcellas póde complicar o calculo, obrigando-nos a fazer uma série de addicções successivas, da primeira parcella com a segunda, da somma obtida com a terceira, da nova somma com a quarta e assim por diante, cada numero a addicionar não dependendo, de ordinario, do precedente.

Por mais extensa que seja similhante successão, esta regra não comporta abreviação na maioria dos casos; mas, quando os numeros a addicionar são ligados entre si, podemos nos propôr utilisar essa ligação das parcellas, afim de obter a somma sem effectuar as addicções successivas.

---

(18) Numero *oktokaideka* (dezoito).

(18a) Os antigos não separavam a ideia abstracta da multiplicação de sua origem geometrica, concreta. Para elles o *producto* era chamado *rectangulo*, em vista da concepção geometrica da multiplicação, segundo a qual o conhecimento da superficie daquella figura é referido ao do quadrado.

AFAGADO

E' o que se verifica no caso da ligação ou relação mais simples, isto é, aquelle em que as parcellas são iguaes, o qual corresponde ao que chamamos *multiplicação*.

A palavra multiplicar lembra, aliás, o objecto de similhante avaliação; porque multiplicar significa dobrar muitas vezes; e a multiplicação tem, com effeito, por objecto repetir um numero dado tantas vezes quantas são indicadas por um outro numero tambem dado. E' por isso que a parcella repetida teve a denominação de *multiplicando* e o numero de parcellas a de *multiplicador*. Quanto á *somma*, por ser especialmente produzida por essa repetição, chamou-se-lhe *producto*.

A multiplicação tendo em vista conhecer o producto, quando são dados os seus dois factores denominados *multiplicando* e *multiplicador*, percebe-se que, comparado á divisão, o seu objectivo é exactamente o inverso do desta ultima, em que, ao contrario, dão-se o producto e um dos *factores* e procura-se determinar o outro.

214.—FILIAÇÃO PARA COM A NUMERAÇÃO.— Tendo apreciado a filiação da *multiplicação* para com a somma, vejamos agora o modo pelo qual similhante avaliação está comprehendida na propria numeração systematica. Já dissemos no paragrapho anteprecedente que a idéa de multiplicação acha-se incluida na constituição de um numero qualquer, sempre igual a uma somma de productos binarios, onde um dos factores é uma *potencia* da base, e o outro acha-se expresso por um numero inferior a esta.

Assim, por exemplo, no numero 53640 vemos as potencias 10, 100, 1000, 10000 multiplicadas respectivamente pelos numeros 4, 6, 3 e 5; porquanto elle se compõe da somma de 50000 ou 5 vezes 10000, com 3000 ou 3 vezes 1000, 600 ou 6 vezes 100, e 40 ou 4 vezes 10.

Cumpre, todavia, reconhecer que na constituição numeral, a multiplicação só é applicada a pequenos numeros,

de modo que uma tal restricção não póde facilitar a sua concepção propria, que exige uma generalisação decisiva.

De outro lado, por isso que nestes numeros as multiplicações estão sempre feitas por uma potencia da base, 10, deprehende-se da propria constituição numeral que *para multiplicar um numero simples por 10, 100, 1000, 10000 e etc., bastará escrever-lhe um, dois, tres, quatro, etc. zeros á direita.*

No caso de um numero composto qualquer, similhante multiplicação far-se-ha do mesmo modo, porquanto, collocando á sua direita um, dois, tres, etc. zeros, cada um dos seus algarismos representará unidades 10, 100, 1000, etc. vezes maiores; portanto, todo o numero ficará tambem esse mesmo numero de vezes maior. Fazemos esta observação porque ella nos será adiante de grande utilidade.

215. — A GENERALISAÇÃO DO PROBLEMA DAS SERIES. — Considerando a multiplicação como filiada directamente á somma, ella se apresenta como o caso mais simples de uma immensa série de avaliações. Com effeito, além desse caso em que as parcellas acham-se ligadas por uma relação de igualdade, podemos conceber uma infinidade de avaliações especiaes, fazendo variar o modo de ligação entre as parcellas a addiccionar.

Podemos, por exemplo, suppor que se trata da sommação de uma série de parcellas em que cada uma equivale, não á precedente como no caso da multiplicação, mas á precedente addiccionada a uma certa quantidade, como por exemplo, á somma das duas, tres... precedentes; ou ainda á precedente diminuida de uma certa quantidade e etc.; como por exemplo, da ante-precedente, ou da somma desta com a seguinte, senão da sua differença e etc.; podemos suppor ainda que cada parcella é igual á precedente multiplicada por si mesma; ou á precedente multiplicada por uma certa quantidade; podemos imaginar tam-

bem que cada parcella é igual á precedente dividida por certa quantidade; e assim uma infinidade de outras sommações.

A multiplicação, considerada como uma addicção de parcellas iguaes, constitue, portanto, o ponto de partida de um numero illimitado de avaliações, onde quasi todas são irrealisaveis, pela impossibilidade que se encontra em utilisar a *dependencia* entre as parcellas para instituir sua sommação especial, salvo o caso em que esta se reduz á série fundamental caracterisada pela igualdade dos seus termos.

Isso nos mostra, desde já, a extensão de que é susceptivel o calculo arithmetico, e ao mesmo tempo manifesta a sua imperfeição.

216.—GENERALISAÇÃO DA MULTIPLICAÇÃO. PRODUCTOS INDEFINIDOS. POTENCIAS.— Mas similhante extensão e imperfeição do calculo arithmetico tornar-se-hiam mais apreciaveis, se considerassemos a mesma generalisação relativamente á multiplicação. Esta póde, com effeito, ser olhada por sua vez como o caso mais simples de uma segunda classe de avaliações, não menos vasta nem mais perfeita do que a primeira.

Basta, para isso, que concebamos uma serie regular de multiplicações, e que nos seja proposto utilisar o modo de ligação entre cada factor e os precedentes afim de obter o producto, e isto sem auxilio das multiplicações successivas.

E' o que teriamos, por exemplo, se quizessemos obter um *producto*, sabendo que cada factor é igual ao precedente multiplicado por uma certa quantidade, ou ao producto dos dois, tres.... etc. precedentes, suppostos desiguaes e etc. Tal é a difficuldade deste segundo systema de avaliações, que não sabemos determinar taes productos sinão executando as multiplicações successivas: de sorte que só é possivel estender a noção de producto a mais de dois factores, chamando producto de muitos factores ao resultado que se

obtem multiplicando um numero por outro; o producto obtido por um 3°, este novo producto por um 4°; e assim por diante, até que todos os numeros considerados tenham sido multiplicados successivamente.

Mesmo no caso mais simples em que todos os factores são iguaes, a arithmetica não possue meios especiaes de obtel-os.

Já sabemos que a um producto de factores iguaes denomina-se *potencia*, e que esta noção, do mesmo modo que as ideias de somma e de multiplicação, filia-se directamente á numeração systematica; porquanto vimos que cada numero é uma somma de *potencias successivas da base*, respectivamente multiplicadas por numeros inferiores a esta. Agora vemos que esta noção, anteriormente ligada em cada numero ás suas unidades de diversas ordens, póde ser generalisada, estendendo-se a numeros quaesquer; chamando-se 2ª, 3ª, 4ª,.... potencias de um numero ao producto de 2, 3, 4,.... factores iguaes a este numero, e sendo o numero de taes factores denominado *grão* da potencia.

Podemos, com effeito, formar a 2ª, 3ª, 4ª, etc. potencias de um numero qualquer; mas, acabamos de notar que, a não ser executando multiplicações successivas, a arithmetica não dispõe de nenhum processo especial para avaliar taes potencias. De sorte que a formação das potencias quaesquer de um numero, ou, como se diz ordinariamente, a elevação de um numero a uma potencia qualquer, não suscita em arithmetica nenhuma operação distincta, contrariamente ao que se dá com a multiplicação relativamente á addicção successiva de parcellas iguaes entre si.

220. — A NECESSIDADE DE ORDENAR A MULTIPLICAÇÃO RELATIVAMENTE AO MULTIPLICADOR. DISTINCÇÃO DOS CASOS. — Feitas estas observações, a theoria da multiplicação torna-se facilmente apreciavel. Com effeito, considerada a multiplicação como uma somma abreviada de parcellas iguaes,

percebe-se desde logo que a difficuldade de effectuar a avaliação não depende da grandeza de cada parcella, mas, simplesmente, do numero dellas; porquanto a somma de duas parcellas obtem-se sempre do mesmo modo, quer as parcellas sejam muito grandes, ou não; ao passo que, crescendo o numero de parcellas, a operação complica-se por exigir uma serie de addicções successivas, tanto maior quanto maior é o numero das parcellas consideradas.

Nestas condições, vê-se que a grandeza do multiplicando não póde difficultar a operação, que, portanto, deve ser apreciada tendo em vista o multiplicador, do qual unicamente depende o modo de instituir o producto.

Elaborada assim, a theoria da multiplicação torna-se essencialmente similhante á das operações precedentes; porque o modo natural por addicções successivas nos fornece immediatamente os meios de effectuar a multiplicação no caso em que o multiplicador tem um só algarismo, ao qual facilmente reduz-se em seguida o caso geral em que o multiplicador é qualquer, mediante sua decomposição usual.

221. — Da realisação da operação: 1° no caso em que o multiplicador é simples; 2° no caso em que o multiplicador é composto. Marcha do calculo. — 1°. No caso em que o multiplicador tem um só algarismo, dissemos que o modo natural por addicções successivas permitte immediatamente effectuar a operação. Com effeito, nesse caso, qualquer que seja o multiplicando, a *repetição* ou multiplicação deste reduz-se sempre as repetições elementares dos algarismos que representam as unidades de diversas ordens em que se decompõe, de accôrdo com a numeração systematica. Ora, essas repetições elementares (multiplicações de numeros simples) podem sempre ser realisadas por addicções successivas; e os seus resultados, sendo pouco numerosos, podem mesmo ser facilmente retidos.

Os do systema decimal acham-se condensados na seguinte tabella que, embora attribuida a Pythagora, já era muito antes delle utilisada pelos sacerdotes theocratas, principalmente entre os egypcios :

Tabella Theocratica da Multiplicação

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para formal-a, em qualquer systema de numeração, basta notar que a 1ª columna e a 1ª fileira são constituidas pela addicção successiva da unidade 1; que a 2ª columna, bem como a 2ª fileira, são formadas da addicção successiva do numero 2;que a 3ª columna,e bem assim a 3ª fileira,são formadas da addicção successiva do numero 3 ; e assim por diante até a ultima columna da direita e a ultima fileira de baixo, que começam pelo numero immediatamente inferior á base numeral adoptada. Desta arte, no cruzamento de uma columna com uma fileira qualquer, encontra-se o resultado de tantas repetições do numero que começa a 1ª, quantas são indicadas por aquelle que começa a 2ª, e vice-versa. Pondo de parte os resultados em que figura a unidade 1 como multiplicando ou como multiplicador, vê-se na *tabella* que o numero de productos elementares que convém reter, é igual a 8 vezes 8 ou 64 ; e isto confirma o que a respeito dissemos em outro lugar.

Para esclarecer o caso de que nos occupamos, supponhamos que se trata de multiplicar 2345 por 6. Esta operação tendo por fim repetir este numero 6 vezes, ou sommal-o cinco vezes a si mesmo, é claro que chegariamos ao resultado escrevendo-o 6 vezes, e em seguida sommando cinco vezes as 5 unidades a si mesmas, o que daria 30, sommando depois cinco vezes as 4 dezenas a si mesmas e juntando ao resultado as tres dezenas de reserva da somma anterior, o que daria 27; e assim por diante; do que resultaria 14070 para somma procurada.

Porém, em vez de dizer 5 e 5 são 10 e 5 são 15 e 5 são 20 e 5 são 25 e 5 são 30, podemos dizer logo: 5 *repetido* 6 vezes, ou 6 vezes 5 são 30; escrever 0 e reservar 3, em vez de 4 e 4 8 e 4 12, etc., dizer logo 4 repetido 6 vezes ou 6 vezes 4 são 24 e 3 de reserva 27; escrever o 7 e reservar o 2; dizer do mesmo modo 6 vezes 3 são 18 e 2 são 20; escrever o 0 e reservar o 2; 6 vezes 2 são 12 e 2 de reserva são 14.

Vê-se que este meio é muito mais expedito, exigindo apenas que se conserve de memoria que 6 vezes 5 são 30, que 6 vezes 4 são 24, etc.; e em geral para todas as multiplicações similhantes a esta, que se retenham os resultados das repetições ou multiplicações elementares, isto é, dos numeros simples, que se acham, como dissemos, condensados na tabella acima.

Eis o typo do calculo, que fazemos tambem no systema septimal, onde raciocinaremos do mesmo modo para chegar ao resultado:

2345	2345
6	6
14070	21102

O processo que acabamos de executar reduziu-se a repetir successivamente 6 vezes as unidades de 1ª ordem do multiplicando, 6 vezes as suas unidades de 2ª ordem, 6 vezes as de 3ª, 6 vezes as de 4ª; e a escrever por baixo os respectivos pro-

ductos parciaes, tendo o cuidado de addiccionar a cada um delles as *reservas* de unidades da mesma ordem que porventura provierem do precedente.

E' facil, portanto, construir uma regra geral para todas as multiplicações neste caso.

Comprehende-se que, á similhança da addicção, poderiamos tambem ter começado a operação pelas unidades mais elevadas; mas então, aqui como lá, o calculo tornar-se-hia mais trabalhoso por não fornecer immediatamente resultados definitivos, em vista da impossibilidade de addiccionar a cada resultado as reservas provindas do anterior.

2º — Passemos agora ao caso em que o multiplicador é um numero inteiro qualquer.

Seja, por ex., proposto multiplicar 623 por 534.

Para reduzir este caso ao precedente basta notar, á similhança do que fizemos na addicção e subtracção, que o numero 534 decompõe-se em 4 unidades de primeira ordem, 3 de segunda ordem ou 30 de primeira e 5 de terceira ordem ou 500 tambem de primeira. Assim, não teremos mais do que repetir o multiplicando 4 vezes, depois repetil-o 30 vezes e finalmente 500 vezes. A somma de taes repetições ou multiplicações parciaes será forçosamente o producto total procurado. Ora, já sabemos repetir 4 vezes o numero 623, porquanto é uma multiplicação do caso precedente.

$$\begin{array}{r} 623 \\ 4 \\ \hline 2492 \end{array}$$

Resta-nos, pois, repetir o multiplicando, a principio 30 vezes e depois 500 vezes, isto é, multiplical-o por 30 e depois por 500.

Para isto notemos a principio que multiplical-o por 3 unidades de 2ª ordem ou 30 é o mesmo que multipli-

cal-o por 3, depois o producto obtido por 10; e que multiplicar por 10 é tornar o numero 10 vezes maior, o que se consegue, como dissemos, escrevendo um zero á sua direita.

$$\begin{array}{r} 623 \\ 3 \\ \hline 1869 \end{array}$$

Temos, pois, 1869 para producto de 623 por 3; porém, este producto deve ser multiplicado por 10, o que o torna igual a 18690.

Por fim observaremos, de um modo analogo, que multiplicar por 5 unidades de 3ª ordem ou 500 de 1ª, é o mesmo que multiplicar por 5 a principio e depois o producto por 100, tornando-o assim 100 vezes maior.

$$\begin{array}{r} 623 \\ 5 \\ \hline 3115 \end{array}$$

O producto de 623 por 5 é 3115; mas o de 623 por 500, devendo ser 100 vezes maior, será 311500.

Para termos agora o producto total de 623 por 534, é preciso sommar os tres productos parciaes de 623 por 4, por 30 e por 500, o que nos dará 332682.

$$\begin{array}{r} 623 \\ 534 \\ \hline 2492 \\ 18690 \\ 311500 \\ \hline 332682 \end{array}$$

Para abreviar a pratica da multiplicação nunca se escrevem á direita dos productos parciaes do multiplicando pelos algarismos que representam as dezenas, centenas, etc. do multiplicador, os zeros em que terminam; mas assentam-se os differentes productos parciaes uns debaixo dos outros, tendo o cuidado de collocar sempre na mesma columna ver-

tical unidades da mesma especie; e reflectindo que o producto do multiplicando pelo algarismo significativo das dezenas do multiplicador dá dezenas, pelo das centenas, dá centenas, etc.

Observando esta pratica, tomaria á fórma seguinte o exemplo precedente, que calculamos tambem no systema septimal.

623	623
534	534
2492	3425
1869	2502
3115	4351
332682	466545

Uma vez concebida a operação, podemos systematisar a sua pratica na seguinte regra:

Escreve-se o multiplicador por baixo do multiplicando. Multiplica-se successivamente da direita para a esquerda cada um dos algarismos do multiplicador por todos os do multiplicando, tendo o cuidado de escrever os productos parciaes uns por baixo dos outros, de maneira que o primeiro algarismo de cada um fique collocado abaixo do algarismo do multiplicador que o produziu. Sublinha-se o ultimo dos productos parciaes e faz-se a somma de todos elles.

Applicando esta regra ás multiplicações seguintes, a 1ª no systema septimal e a 2ª no decimal, teremos:

1623	1789
504	15(00
10425	8945
12351	1789
1245525	2683500

No primeiro exemplo ha apenas dois productos parciaes, porque o producto do multiplicando pelas septenas do multiplicador é nullo; e note-se que o 1° algarismo do 2° producto, exprimindo unidades de 3ª ordem, está escripto por baixo do que representa unidades da mesma especie no 1° producto parcial.

No segundo exemplo, abstrahindo dos dois zeros que se acham á direita do multiplicador, fizemos o calculo como si este fosse 15 e escrevemos os mesmos zeros á direita do producto obtido.

O resultado é necessariamente o mesmo. Com effeito, em lugar de multiplicar 1789 por 15 centenas, o multiplicamos por 15, e depois por 100.

Ora, se repetimos o multiplicando 100 vezes menos, em compensação tomamos o producto 100 vezes mais; porque, escrevendo os dois zeros á sua direita, tornamos 100 vezes maior cada uma de suas unidades de diversas ordens, e, portanto, a somma de todas ellas.

Para completar estas considerações sobre a marcha do calculo, devemos accrescentar algumas observações a proposito da ordem a seguir nas multiplicações. Já dissemos que para formar os productos parciaes do multiplicando pelos differentes algarismos do multiplicador, é mais expedito começar a multiplicação pela direita do multiplicador. E' a mesma conveniencia que nos leva a começar a somma pela direita das parcellas.

Mas, quanto á ordem em que se deve proceder a respeito dos algarismos do multiplicador, é indifferente á brevidade do calculo que comecemos a operação pela direita ou pela esquerda, contanto que neste ultimo caso escrevamos os algarismos obtidos de maneira que nos differentes productos parciaes as unidades da mesma ordem fiquem sempre em uma columna vertical, como se vê no exemplo seguinte:

```
  31415      31415
    123        123
 -------    -------
  94245     31415
 62830       62830
31415         94245
 -------    -------
3864045     3864045
```

Conclue-se, portanto, que a pratica seguida na multiplicação, de principiar o calculo pelos algarismos de ordem

menos elevada do multiplicando, é devidamente conveniente; mas que o executar a operação, começando tambem pelos algarismos de ordens mais fracas do multiplicador, obedece apenas á harmonia de não começar pela direita em um dos factores, e no outro pela esquerda.

Todavia, cumpre reconhecer que o modo não usual pode ser preferivel quando, porventura em calculos approximados, só haja necessidade de determinar os algarismos correspondentes ás unidades de ordens mais elevadas do producto total. E' o que verificaremos mais adiante.

Emfim, para tirar a *prova* da operação pode-se pratical-a de novo; mas este processo é defeituoso, porque torna possivel a reproducção do erro porventura commettido.

E' preferivel inverter a ordem dos factores, isto é, multiplicar o multiplicador pelo multiplicando, devendo-se obter o mesmo producto, si a operação estiver certa.

Convém ainda utilisar esta faculdade de inverter os factores tomando sempre para multiplicando o maior dos numeros dados e para multiplicador o menor, porque assim reduz-se o mais possivel o numero de multiplicações parciaes, abreviando, portanto, a operação.

222.—OBSERVAÇÕES SOBRE A INFLUENCIA DOS FACTORES NO PRODUCTO. APRECIAÇÃO DA CONSTANCIA DO PRODUCTO, QUANDO SE INVERTEM OS FACTORES. FREQUENCIA, INTENSIDADE. EXPLICAÇÃO DA INDETERMINAÇÃO QUE RESULTA DA VARIAÇÃO INVERSA DOS FACTORES. — Embora sob o ponto de vista concreto o *producto* seja sempre da mesma especie que o *multiplicando*, do mesmo modo que a *somma* é da especie das *parcellas*, é indifferente, sob o ponto de vista abstracto, tomar o *multiplicando* para *multiplicador* e vice-versa.

Isto significa que o *valor de um producto não se altera quando invertemos a ordem dos seus factores*.

A tabella da multiplicação nos leva a reconhecer similhante propriedade; porém, ella pode ser deduzida de uma

outra mais importante, que consiste na *constancia de um producto quando os seus factores variam ao mesmo tempo em razão exactamente inversa*, isto é, quando um delles é multiplicado por uma certa quantidade, e o outro é dividido pela mesma.

Suppondo, por emquanto, verdadeira esta proposição, tomemos, por exemplo, o producto de 3 por 12 e mostremos que equivale ao de 12 por 3.

Como o producto 3 por 12 não se altera quando se multiplica o primeiro factor por um numero qualquer, contanto que se divida o segundo pelo mesmo, pode-se desde então escolher uma taxa de variação, de maneira que o novo multiplicando torne-se igual ao primitivo multiplicador 12; e o novo multiplicador tornar-se-ha, por isso mesmo, igual ao primitivo multiplicando 3. Essa taxa sendo evidentemente 4, teremos immediatamente que 3 por 12 equivale a 12 por 3. (18b).

(18b) Si os factores considerados forem indecomponiveis, será preciso tomar uma taxa fraccionaria. Assim, no caso dos factores primos 5 e 3, multiplicaremos o primeiro e dividiremos o segundo por $\frac{3}{5}$. A demonstração usual desta propriedade, publicada no começo deste seculo no jornal de mathematica de *Gergonne*, é a seguinte: Supponhamos que se trata de demonstrar que o producto de 5 por 3 é igual ao de 3 por 5. Como o producto de 5 por 3 equivale á somma de tres parcellas de cinco unidades cada uma, podemos represental-o no seguinte quadro:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Fazendo a somma das unidades no sentido horisontal acha-se, com effeito, 5 mais 5 mais 5, ou 5 vezes 3; fazendo-a tambem no sentido vertical, tem-se 3 mais 3 mais 3 mais 3 mais 3, ou 3 vezes 5. As duas sommas sendo iguaes, por isso que a ordem das parcellas não as altera, segue-se que o producto de 5 por 3 equivale ao de 3 por 5.

Demonstração similhante pode ser suggerida pela concepção geometrica da multiplicação. Com effeito, o producto de 5 por 3 pode ser olhado como representando a superficie de um rectangulo cujos lados tem respectivamente 5 e 3 modulos de comprimento. Ora, tirando pelos pontos de divisão de cada um delles rectas parallelas ao outro, a superficie do rectangulo ficará constituida por 15 quadrados, quer estas unidades de superficie sejam contadas no sentido horisontal, o que dá 5 mais 5 mais 5

Para concluir a theoria da multiplicação resta-nos justificar a proposição acima, attinente á *constancia de um producto quando os respectivos factores variam simultaneamente de uma mesma quantidade, mas em razão inversa*. Para isso precisamos, porém, apreciar separadamente a influencia de cada um dos factores na variação do producto; porque, depois, sem difficuldade, deduziremos a sua acção mutua.

1.º Supponhamos que o *multiplicando* torne-se um certo numero de vezes maior ou menor, ficando constante o *multiplicador;* e apreciemos a variação do *producto*. Como este é a somma de tantas parcellas iguaes ao multiplicando quantas são indicadas pelo multiplicador, é obvio que, tornando-se um certo numero de vezes maior ou menor o valor de cada parcella, isto é, o *multiplicando*, sua somma ou o *producto* tornar-se-ha tambem o mesmo numero de vezes maior ou menor.

2.º Supponhamos agora que o *multiplicador* torna-se um certo numero de vezes maior ou menor, ficando constante o *multiplicando*; e apreciemos a variação do *producto*. O multiplicador sendo o numero de parcellas iguaes de que o producto é a somma, é claro que, ficando constante o multiplicando, isto é, o valor de cada uma das parcellas, sua somma ou o *producto*, tornar-se-ha tantas vezes maior ou menor quantas maior ou menor fôr o numero de parcellas.

Conhecido assim o papel de cada factor na formação do producto, podemos concluir immediatamente *que um producto fica constante quando um dos factores torna-se um certo numero de vezes maior ou menor, contanto que o*

---

ou 5 vezes 3, quer o sejam no sentido vertical, o que dá 3 mais 3 mais 3 mais 3 mais 3 ou 3 vezes 5. Assim concebida, a demonstração torna-se preferivel por dar idéa da concepção geometrica da multiplicação, mostrando desde logo a harmonia que deve existir entre o abstracto e o concreto.

outro torne-se o mesmo numero de vezes menor ou maior. Com effeito, com a variação de um dos factores o producto torna-se um certo numero de vezes maior; mas, com a variação do outro, torna-se o mesmo numero de vezes menor. Assim, as duas variações inversas se compensam; e o producto não soffre alteração. (18c).

Do que acabamos de dizer deprehende-se que um producto considerado pode ser constituido de duas maneiras por meio de seus factores: seja repetindo grande numero de vezes um multiplicando pequeno, seja escolhendo um multiplicando bastante grande, e o repetindo um pequeno numero de vezes; de sorte que, na formação do producto, a *frequencia* das repetições do multiplicando, expressas pelo multiplicador, torna-se equivalente ao augmento de *intensidade* no valor do mesmo multiplicando.

Ora, si essas duas variações tiverem lugar proporcional e inversamente, ellas nos darão a primeira applicação nu-

---

(18c) A respeito da relação geral entre a grandeza do producto e a de cada um dos factores, o que se torna sobretudo notavel é a igual participação destes, qualquer que seja a sua desigualdade, contanto que a taxa de variação seja a mesma.

Acabamos de vêr, com effeito, que um producto pode-se tornar 2, 3... vezes maior, quer multiplicando por 2, 3... um dos factores, quer fazendo o mesmo com o outro.

Si em vez de multiplicarmos por 2, 3... qualquer dos factores, lhe addiccionarmos 2, 3... unidades, é evidente que as variações do producto serão diversas. Assim, addiccionando 2, 3... unidades ao multiplicador, o producto virá augmetado de 2, 3... vezes o multiplicando; porque, addiccionar 2, 3... unidades ao multiplicador, importa em augmentar o producto de 2, 3... parcellas iguaes ao multiplicando. De outro lado, addiccionar 2, 3... unidades ao multiplicando, importa tambem augmentar o producto de 2, 3... vezes o multiplicador. Com effeito, o multiplicando sendo o valor da parcella que tem de ser repetida, addiccionar-lhe 2, 3... unidades, importa em repetir mais 2, 3... unidades, tantas vezes quantas são indicadas pelo multiplicador; de modo que o producto total será igual ao producto primitivo, augmentado de 2, 3... vezes o mesmo multiplicador. Este resultado nos mostra que « tendo de multiplicar a somma de duas parcellas por um numero, pode-se multiplicar separadamente este ultimo por cada uma das parcellas e addiccionar os resultados». Suppondo que subtrahissemos de qualquer dos factores 1, 2, 3... unidades, um raciocinio analogo nos faria reconhecer que o producto ficaria diminuido de 1, 2, 3... vezes o outro factor. Similhante resultado nos levaria tambem a concluir que « tendo de multiplicar uma differença por um numero, pode-se obter o producto multiplicando esse numero por cada um dos termos da differença e subtrahindo o menor resultado do maior».

merica de uma lei de Philosóphia Primeira, formulada especialmente por Newton para o dominio da Mecanica, sob o nome de *igualdade da acção e da reacção*, e generalisada por A. Comte para todos os phenomenos. «*Existe sempre equivalencia entre a reacção e a acção, si sua intensidade é medida segundo a natureza de cada conflicto.*»

No caso actual vê-se, com effeito, a acção exercida sobre o valor do producto, pela variação de *intensidade* do multiplicando, compensada por uma variação igual, mas de sentido contrario, em sua *frequencia* expressa pelo multiplicador.

Quando se torna o multiplicando um grande numero de vezes maior, sob a condição de tornar-se o multiplicador o mesmo numero de vezes menor, o que se consegue multiplicando o primeiro e dividindo o segundo pelo mesmo numero, acabamos de vêr que o producto não se altera. Dahi concluimos que dando a este numero auxiliar um valor bastante grande para exceder a todo o limite numerico fixado de antemão, o multiplicando terá um valor infinitamente grande, ao passo que o multiplicador será infinitamente pequeno, sem que por isso o producto varie.

Vê-se assim que, repetindo um numero infinito de vezes um numero infinitamente pequeno, é possivel reproduzir qualquer numero finito, isto é, comprehendido entre limites usuaes.

Todavia, é forçoso reconhecer que o valor final do producto fica *indeterminado* quando os seus factores, variando em sentido inverso além de todo limite, não se conhece a lei de similhante variação.

Si, por exemplo, no caso em questão, o numero pelo qual se multiplica o 1° factor não é igual áquelle pelo qual se divide o 2°, o producto não ficará constante e poderá tomar todos os valores imaginaveis, sem que se possa jamais saber o que elle adquire em um momento determinado.

CAPITULO VII

Instituição fundamental do calculo theocratico

§ ιθ' (19)

Concepção da Divisão

223. — A INSTITUIÇÃO HISTORICA DA DIVISÃO. — As operações que estudámos no capitulo precedente foram instituidas para resolver tres problemas *concretamente* distinctos.

Cada um delles conduziu a um processo abstracto, especial, que não suscita a minima differença, quer se trate das grandezas descontinuas, quer se considerem as grandezas continuas. Todas ellas suppõem a coexistencia de tres numeros, dos quaes dois são dados ou conhecidos e o terceiro é pedido ou incognito.

A determinação desse numero incognito é sempre possivel e não exige sinão a consideração immediata dos numeros dados.

Mesmo na subtracção, onde o resultado da operação tem tres denominações (resto, excesso, differença), essas tres denominações identificam-se sem difficuldade. E, como no ponto de vista concreto, jamais se póde propor a questão de tirar uma grandeza maior de outra menor, o problema da subtracção é sempre tão possivel como o da addicção e o da multiplicação.

---

(19) Numero — *eneakaideka* (dezenove).

Finalmente, na instituição systematica das tres operações, o caso geral recae no caso fundamental, mediante a decomposição delle em varios *casos* elementares, que são simultaneamente considerados e podem ser executados em qualquer ordem. E' esse conjuncto de propriedades que explica por que razão taes operações foram instituidas systematicamente desde a infancia de nossa especie, isto é, no periodo *fetichista*.

Agora devemos começar o estudo da divisão dos numeros inteiros, que só muito mais tarde, sob o regimen polytheico, foi instituida pelo sacerdocio theocratico para resolver certas questões suscitadas pela adoração dos astros (Astrolatria).

Similhante operação offerece os mais profundos contrastes com o conjuncto das anteriores, ás quaes ella não se póde filiar sinão difficilmente. Pois que a filiação mais simples, em relação á multiplicação, só se torna facil depois que se concebe a multiplicação como caracterisando a lei que prende a area de um rectangulo aos seus lados; e a filiação relativamente á addicção e á subtracção exige raciocinios já consideraveis.

Todos estes contrastes sobresahirão examinando as condições que levaram a instituir a divisão. A Humanidade foi conduzida á *divisão* mediante a consideração de tres problemas que successivamente se apresentaram no decurso da sua evolução:

1.° *Dividir um numero em partes iguaes*;

2.° *vêr quantas vezes um numero contém outro*;

3.° *determinar um dos factores de um producto, quando este e o outro factor são dados*.

O primeiro desses problemas apparece desde o fetichismo inicial; mas é o que devemos considerar em ultimo lugar. A necessidade de manter a continuidade dogmatica nos obriga, com effeito, a considerar a *divisão* segundo o ultimo dos problemas que conduziram a ella.

Esse problema é, como vimos, o inverso da multiplicação, e consiste em, dados um producto e um dos factores, achar o outro.

Além disso, o exame desse terceiro problema aperfeiçoa a apreciação historica, fazendo sobresahir ainda a origem sacerdotal da divisão, de accôrdo com o segundo.

Para comprehendel-o convém indicar préviamente a origem geometrica da multiplicação. Porque só essa origem conduziu ao problema inverso da multiplicação, e a instituição da *Geometria* foi devida ao sacerdocio fetichiocratico, cabendo, porém, o seu surto ás castas theocraticas.

224.—SOBRE A INSTITUIÇÃO DA DIVISÃO, COMO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO. — A *Geometria* conduziu á multiplicação quando os theocratas propuzeram o problema de referir o conhecimento da superficie do rectangulo á do quadrado. Os sacerdotes primitivos notaram que essa avaliação era possivel todas as vezes que se conseguia medir os lados do rectangulo por um modulo ou unidade de comprimento. Pois que, nessa hypothese, tirando pelos pontos de divisão de um dos lados rectas parallelas ao outro, o rectangulo ficava dividido em quadrados que tinham para lado o modulo.

Assim, tudo se reduzia a saber quantos desses quadrados se continham no rectangulo.

Ora, esse numero póde ser encarado como dependendo da medida dos lados por varios modos. (19a)

(19a) Assim, imaginando um rectangulo cujos lados sejam representados pelos numeros 5 e 16, póde-se avaliar o numero de quadrados nelle contidos, sommando 16 (que é o numero de quadrados da fileira superior), com 4 (que é o numero de quadrados da 1ª columna da direita, não contando com o quadrado dessa columna, já incluido na fileira superior), com 15 (que é o numero de quadrados da fileira immediatamente inferior, menos o quadrado incluido na 1ª columna da direita), com 3 (que é o numero de quadrados da 1ª columna da esquerda, menos os dois já incluidos nas fileiras consideradas), com 14 (numero de quadrados da 3ª fileira superior menos os dois já incluidos nas columnas externas), com 2 (numero dos quadrados que restam para considerar na segunda columna da direita), com 13 (quadrados

Porém, a maneira mais simples de avaliar o numero de quadrados contidos na superficie do rectangulo consiste em fazer a somma dos quadrados segundo as fileiras ou columnas.

Para isto basta observar que o numero de quadrados de uma fileira ou de uma columna é o mesmo que o numero que representa o lado respectivo; e que o numero de fileiras ou de columnas é o mesmo que apresenta o outro lado.

Vê-se, assim, que a area do rectangulo é representada por um producto em que os factores são os lados do rectangulo. (Si estes lados forem expressos por 16 e 5, a area será igual ao producto de 16 por 5, ou de 5 por 16). E a dupla maneira de considerar os dois factores como representando o multiplicando ou o multiplicador, mostra logo que a ordem dos factores não altera o producto.

Isto posto, comprehende-se que muitas vezes surgiria, como hoje, o problema que consiste em determinar um lado de um *rectangulo*, quando fossem conhecidos a *area* e o outro *lado*. O que abstractamente significa:

Dados um producto e um dos factores achar o outro.
A solução espontanea deste problema consiste em ensaiar numeros successivos, multiplicando-os pelo factor conhecido até achar um producto igual á area.

---

que restam considerar na segunda fileira inferior), com 1 (quadrado que resta a considerar na segunda columna da esquerda), com 12 (quadrados que restam da ultima fileira a considerar): 16 mais 4 mais 15 mais 3 mais 14 mais 2 mais 3 mais 1 mais 12 ou 16 mais 15 mais 14 mais 13 mais 12 mais 1 mais 2 mais 3 mais 4.

Examinando outros rectangulos seria facil apanhar a lei de filiação dos dois grupos de parcellas; mas, esse exame é inutil para o fim que temos em vista. Podia-se tambem começar pelo lado menor: sommar, por exemplo, os quadrados segundo as parallelas á transversal que, partindo de um dos vertices, separa no rectangulo um triangulo isosceles.

A area seria dada, então, no nosso exemplo, pela somma 1 mais 2 mais 3 mais 4 mais 5 mais 5 multiplicado por 10 mais 5 mais 4 mais 3 mais 2 mais 1.

Pelo modo que indicamos em seguida, que é o unico usual, ou contam-se 5 fileiras de 16 quadrados cada uma, o que dá 5 vezes 16; ou tomam-se 16 columnas, cada uma com 5 quadrados, o que fornece 16 vezes 5. De sorte que, desta ou daquellas maneiras, obtem-se sempre o mesmo numero de quadrados (80).

Esse processo é susceptivel de aperfeiçoamentos, mas, não devemos consideral-os agora. Vejamos como, partindo deste problema, se reconhece a sua identificação abstracta com os dois outros que indicamos acima como conduzindo a elle.

O producto sendo dado e um dos factores, podemos imaginar duas hypotheses :

1ª, ou esse factor representa o *multiplicando* ;

2ª, ou representa o *multiplicador*.

1.ª Si o factor conhecido representa o multiplicando, o producto pode ser considerado como uma somma de parcellas iguaes a elle, e o factor incognito será então o numero das parcellas. Portanto, para determinar o factor desconhecido, basta saber quantas vezes o factor dado se contém no producto. Para isso podemos seguir dois processos : ou sommar o factor conhecido comsigo mesmo até achar o producto; ou tirar o factor conhecido do producto emquanto fôr possivel. Seja qual fôr o processo seguido, o problema equivale a vêr *quantas vezes um numero se contém em outro*.

2.ª Si, porém, o factor dado representa o multiplicador, o producto pode ser considerado como uma somma de parcellas iguaes, na qual se conhece o numero de parcellas e ignora-se o valor de cada parcella.

Portanto o producto se apresenta como susceptivel de ser dividido em tantas partes iguaes, quantas são as indicadas pelo factor dado ; e o factor desconhecido é o valor de cada uma das partes. Isto é, o problema neste caso recae no seguinte :

Dividir um numero em tantas partes iguaes quantas são as indicadas por um outro.

A solução espontanea é desde então a que já foi indicada.

225.—Instituição da divisão pelo segundo problêma. —Antes, porém, deste surto da Geometria terrena, já a Astro-

latria tinha conduzido á necessidade de *instituir systematicamente a divisão, partindo de outro problema*. Com effeito, a adoração dos astros determinou a contemplação assidua delles, e essa contemplação fez descobrir os movimentos proprios do Sol e da Lua. Mais tarde essa contemplação revelou que entre os astros, a principio confundidos com as estrellas, haviam alguns que tinham tambem movimentos proprios : eram os planetas. Estes obtiveram naturalmente maior importancia que as estrellas. E quando o polytheismo substituiu-se ao fetichismo, os deuses desses astros, como mais inaccessiveis, mais mysteriosos, adquiriram maior consideração mesmo do que o do Sol, e o da Lua.

A posição relativa de taes astros tornando-se do maximo interesse, procurou-se prever os seus diversos aspectos. Para isto era preciso conhecer o tempo das *revoluções sideraes* dos planetas em torno da Terra, isto é, o tempo que leva um planeta para voltar á mesma estrella.

Mas, esse tempo pode ser calculado para cada planeta por meio do respectivo *anno synodico*, isto é, pelo tempo que leva o Sol para achar-se na mesma posição em relação a esse planeta. Ora, essa questão reduziu-se, finalmente, em todos os casos, a *determinar quantas vezes um numero se contém em outro*. (19b)

(19b) E' assim que, considerando em certa posição, em relação ao Sol, um planeta como Jupiter, que está mais distante do Sol do que a Terra, os theocratas notaram que, quando o Sol já tinha concluido a sua revolução annual, Jupiter apenas tinha percorrido alguns gráos do seu circulo. De sorte que o Sol no fim de alguns dias, depois de ter começado o novo anno, achava-se na mesma posição em relação a Jupiter.

Assim, o anno sideral do Sol foi supposto de 360 dias, o que fez dividir o circulo em 360 partes iguaes, suppondo que o movimento do Sol era uniforme. Cada uma dessas partes foi o que se chamou o *gráo*.

O anno synodico de Jupiter pareceu ser de 390 dias; e, como o planeta só tinha percorrido uma parte do seu circulo, segue-se que nesses 390 dias elle andou o numero de gráos indicado pela differença entre 390 e 360, ou 30 gráos. Isto posto, admittido que o movimento de Jupiter era uniforme, os theocratas fizeram o seguinte raciocinio:

Si em 390 dias Jupiter andou 30° de seu circulo, para andar os 360° levará tantas vezes 390 quantas vezes 360 contiver 30.

Agora é facil de vêr como este problema recae nos dois que acima citamos. Porque, para saber quantas vezes uma grandeza se contém em outra, quando as duas estão avaliadas, o processo espontaneo consiste em tirar a menor da maior; do resto tornar a subtrahir a menor; e assim continuar emquanto fôr possivel.

Contando o numero de subtracções, ter-se-ha o *quociente* pedido, ou o quociente e um *resto*, menor do que a menor das grandezas.

Este modo de comparar duas grandezas, referindo o conhecimento de uma ao da outra, é o que se chama determinar a *relação geometrica*, por contraste com a comparação por subtracção, que se denomina *relação arithmetica*. A distincção entre ambas é que na *relação geometrica*, ou *quociente*, uma das grandezas fica determinada por meio de outra, sem referencia a nenhum outro modulo. Ao passo que na *relação arithmetica*, ou *differença*, uma grandeza fica determinada por meio de outra, mas com o auxilio do modulo.

Desde que se considere a divisão como tendo por objecto *achar a relação entre dois numeros*, póde-se ver nesta combinação o primeiro germen do *Calculo das relações*, isto é, da Algebra.

Todavia, uma vez instituida pelas subtracções successivas, a solução do problema que consiste em achar a

---

Portanto, o problema reduziu-se a dividir 360 por 30 e multiplicar o quociente por 390; ou, o que dá no mesmo, multiplicar os dois tempos 360 e 390, e dividir o producto pela sua differença 30.

Tratando-se de planetas como Mercurio ou Venus, mais proximos do Sol do que da Terra, ver-se-hia que elles não podem realisar uma revolução em torno da Terra sem prazo mais curto do que o Sol; de sorte que, quando o Sol se acha em relação a elles, em uma posição identica áquella em que se achava no começo do anno, já elles têm descripto o seu circulo proprio e mais um certo numero de gráos. Para calcular, pois, a revolução sideral em torno da Terra, um raciocinio analogo ao precedente indica que se deve dividir o producto dos tempos considerados (anno solar e anno synodico) pela somma dos mesmos tempos. Vê-se, portanto, que a questão reduz-se em todos os casos a determinar quantas vezes um numero contém outro.

relação entre dois numeros, isto é, quantas vezes um se contém no outro, reconhece-se que um dos numeros póde ser considerado como decomposto em tantas partes iguaes ao outro quantas são as unidades do quociente.

De sorte que o problema de vêr quantas vezes um numero se contém em outro equivale a dividir um numero em tantas partes iguaes quantas são as unidades do quociente.

O divisor, porém, neste caso indica, não o numero das partes, mas o valor de cada parte.

Finalmente, a solução mostra que o numero maior póde ser considerado como uma somma de parcellas iguaes ao menor, o numero das parcellas sendo igual ao quociente. Esta observação fornece na addicção um processo de avaliação do quociente, ao mesmo tempo que mostra que o maior dos numeros póde ser considerado como um producto de que o menor e o quociente são factores.

Ao mesmo tempo que a Astrolatria conduzia a encarar o problema da determinação da *relação entre grandezas*, a instituição da Geometria fornecia novas applicações deste problema e conduzia a achar uma representação concreta para a multiplicação, conforme já indicámos.

226.— DO ADVENTO FETICHICO DA DIVISÃO.— Antes, porém, que a Astrolatria levasse a instituir systematicamente a divisão, esta já era empregada empiricamente, porque o acto de *dividir* ou repartir, de separar, é elementar nas condições de nossa existencia. (19c)

A *divisão* opera a decomposição de uma grandeza em partes iguaes.

Ora, examinando as condições que levaram a Humanidade a propor similhante problema, reconhece-se que este

(19c) E' á sua necessidade que corresponde o instincto destruidor, e esta observação serve para mostrar que similhante acto liga-se mais á existencia individual do que o acto de ajuntar, dependente do *instincto constructor*. (Notas do Curso do Sr. R. T. Mendes.)

devia offerecer-se, desde épocas immemoraveis, na repartição dos despojos dos vencidos entre os vencedores. Um tal modo de partilha não podia applicar-se sinão aos grupos de objectos similhantes, como prisioneiros, rebanhos, armas, etc.

Quanto ás outras presas, o altruismo inspirou outros meios de repartição pacifica, sobretudo a *sorte* e a consulta ao destino. (19d)

Assim, a primeira noção da *divisão* resultou deste problema: *Dividir uma grandeza em um certo numero de partes iguaes*. O problema poz-se por sua natureza em relação ás pluralidades, isto é, ás grandezas descontinuas; porque no caso das grandezas continuas, as suas difficuldades seriam então insuperaveis. (19e)

Todas estas considerações nos mostram que o problema da divisão surgiu historicamente da decomposição de um grupo em grupos iguaes.

Si as grandezas continuas estão avaliadas, a divisão dellas em partes iguaes entra no caso da divisão das pluralidades.

Vejamos agora a solução inicial deste primeiro problema que conduziu á divisão. A solução mais simples consiste em effectuar uma série de partilhas dando de cada vez um objecto a cada um dos associados. Assim, supponhamos que se trata de dividir 30 objectos por 6 pessoas.

(19d) Vê-se aqui um typo de sabedoria humana, combinando a *racionalidade* com *empirismo*, sob o ascendente do altruismo (como indica por contraste a fabula da partilha feita pelo leão). No ponto de vista moral vê-se a combinação da resignação á fatalidade com a intervenção da *vontade*. (Das notas do Curso do Sr. R. T. Mendes.)

(19e) Para bem avaliar dessa difficuldade, convém distinguir a divisão empirica da divisão systematica das grandezas continuas. Empiricamente, considerando o caso das linhas, por exemplo, o problema reduz-se a dividir uma corda do mesmo comprimento.

Essa divisão é facil quando o divisor é *par*, porque se effectua por metades successivas. Mas, quando o divisor é impar, as difficuldades são tanto maiores quanto mais elevado é o divisor. Neste caso ainda convém notar que a difficuldade reduz-se aos divisores *primos*, os outros casos podendo recahir sempre nesta hypothese. (Das notas do Curso do Sr. R. T. Mendes.)

Distribue-se: 1°, um objecto por cada uma das 6 pessoas. Feito isto ficarão 30 menos 6 objectos, isto é, 24 objectos para dividir. Faz-se uma segunda distribuição pelas 6 pessoas, o que equivale tirar 6 de 24. Ficam, pois, ainda 18 objectos a repartir. Faz-se uma terceira distribuição, ficam 12 objectos. Faz-se uma quarta, ficam 6 objectos que se distribuem exactamente pelas 6 pessoas.

Examinemos quaes seriam os aperfeiçoamentos primitivos dessa solução.

Durante um periodo immemorial do fetichismo o problema da divisão não inspirou outra solução essencial.

Apenas, quando o grupo de objectos a partilhar fosse muito grande relativamente ao numero de associados, era natural que occorresse o expediente de distribuir-se, de cada vez, mais de um objecto, para tornar a divisão mais rapida. E', todavia, de presumir que esse expediente só fosse lembrado muito tarde. Em todo o caso, desde que o desenvolvimento da vida social tivesse conduzido á instituição systematica dos tres problemas fetichicos (addicção, subtracção e multiplicação), é de suppor que se procurasse abreviar a divisão utilisando-se dellas.

Eis aqui os raciocinios que podiam ter guiado o primitivo sacerdocio fetichiocratico.

Examinando o processo espontaneo, reconhece-se que o valor de cada quota é igual ao numero das distribuições parciaes. Desde então o problema da divisão reduz-se a determinar quantas distribuições são possiveis.

E, como para cada distribuição tira-se o divisor do dividendo uma vez, segue-se que o quociente será representado pelo numero de vezes que se puder effectuar tal subtracção.

Assim, o problema de dividir um numero em uma certa quantidade de partes iguaes equivale a determinar *quantas vezes o numero de partes se contém no dividendo*.

Esta observação conduz logo a effectuar a divisão mediante uma serie de subtracções, tirando do dividendo o divisor; do resto obtido procurando tirar o divisor e assim successivamente até que a operação se acabe. Isto posto, contando o numero de operações, tem-se o valor do quociente. Reflectindo sobre o quadro dessas operações, vê-se que o dividendo póde ser considerado como uma somma de parcellas iguaes ao divisor, o quociente indicando o numero das parcellas.

Dahi resulta um novo processo para achar o quociente, sommando o divisor comsigo mesmo, tantas vezes quantas forem necessarias para obter o dividendo. O numero das parcellas dará o valor de cada parte.

Mas, a importancia principal desta observação consiste em permittir utilisar a multiplicação. Com effeito, desde que o dividendo póde ser considerado como uma somma de parcellas iguaes ao divisor, o numero de parcellas sendo representado pelo quociente, segue-se que o dividendo póde ser encarado como um producto de que o divisor é um dos factores e o quociente o outro. A divisão fica desde então constituindo a operação inversa da multiplicação.

Assim apreciada, a determinação do quociente offerece-se como devendo consistir em procurar o numero que multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo. Isto permitte abreviar a avaliação do quociente. Mas, antes de indicar os processos que esta consideração suggere, convém apreciar melhor os resultados a que acabamos de chegar.

230.— Exame inicial acerca da differença entre a divisão e as operações fetichicas.— Em primeiro logar acabamos de vêr como o problema da divisão de um numero em um certo numero de partes iguaes equivale abstractamente aos dois problemas seguintes :

1.° Determinar quantas vezes um numero se contém em outro.

2.° Dado um producto e um dos factores determinar o outro factor.

Ora, estes tres problemas, directamente considerados, são distinctos; e só um exame de sua solução póde mostrar a possibilidade de identifical-os abstractamente. Assim, ao passo que cada uma das operações fetichicas corresponde a um problema unico, a divisão é a solução commum de tres. Além disto, notemos que, qualquer que seja o processo seguido para determinar o quociente, a operação conduz a reconhecer que o problema nem sempre é possivel.

Assim, no primeiro processo, si se tratar de repartir um rebanho entre varios associados, póde acontecer que a totalidade dos numeros a dividir seja tal que não permitta dar a cada um a mesma quota. Isto é, distribuido um certo numero por cada associado, póde ficar um resto menor que o numero de associados. A partilha igual é então inexequivel.

Fazendo-se a determinação pela somma, ou pela multiplicação, a impossibilidade manifestar-se-hia por outra fórma. Com effeito, depois de ter obtido sommas ou productos sempre menores do que o dividendo, a somma de uma nova parcella igual ao divisor, ou o accrescimo de uma unidade ao ultimo quociente experimentado, forneceria uma somma ou um producto maior do que o dividendo; de sorte que, em vez do quociente nós chegariamos a dois numeros consecutivos, um menor e outro maior do que o quociente. Desde então, subtrahido do dividendo a maior das sommas ou o maior dos productos inferiores a elle, ter-se-hia o resto, isto é, os objectos que não podiam ser partilhados igualmente.

A divisão conduz, pois, na generalidade dos casos a dois numeros, a saber, um *quociente* e um *resto*.

A significação de cada um destes dois numeros depende do problema: 1.° Si se trata de dividir um numero em partes iguaes, o quociente indica o maior valor que póde tomar cada

parte; e o resto indica o numero de objectos que ficam por dividir. 2.º Si se trata de determinar quantas vezes o divisor se contém no dividendo, o quociente indica o maximo de vezes que o divisor póde se conter no dividendo; e o resto indica a differença entre o dividendo e o maior multiplo do divisor que nelle se contém. 3.º Si se trata de determinar o numero que multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, o quociente indica o maior factor que, multiplicado pelo divisor, dá um numero inferior ao dividendo; e o resto indica a differença entre o dividendo e o maior multiplo do divisor que nelle se contém.

Ora, isso não acontece em nenhuma das operações fetichicas. Nellas a operação é sempre possivel e só conduz a um numero. De sorte que, com a divisão, vê-se surgir a noção das *avaliações approximadas*.

Desde então surge tambem o problema de prevêr quando a operação conduzirá a um quociente exacto e quando dará um resto; problema que ficará eternamente insoluvel, a não ser em casos particulares, por isso mesmo destituidos de interesse.

Qualquer que seja o processo espontaneamente seguido, a determinação do quociente torna-se impraticavel desde que elle fôr consideravel.

Ora, nas operações fetichicas, quando a operação torna-se impraticavel pelo processo espontaneo, a systematisação consiste em decompôr a operação em operações elementares. Essas operações elementares foram directamente indicadas pela estructura dos numeros dados.

Na divisão, similhante decomposição não se apresenta espontaneamente. Ella não póde ser instituida, senão fazendo prevalecer a consideração do quociente. Similhante condição suppõe um ascendente da razão abstracta, que não se póde dar sinão no periodo theologico, de sorte que a systematisação da divisão seria impossivel antes de similhante phase.

Mas, então, essa systematisação já é directamente solicitada por problemas que conduzem a conceber, já o caso inverso da multiplicação, já a determinar quantas vezes uma grandeza se contém em outra.

231. — ACERCA DO PROBLEMA QUE DEVE PREVALECER PARA MANTER A CONTINUIDADE DOGMATICA NO ESTUDO DA DIVISÃO. — « Tendo mostrado a evolução historica da instituição da divisão, resta assignalar, dos tres problemas que a determinaram, qual o que deve prevalecer.

Para resolver esta questão, cumpre distinguir entre a filiação dogmatica e a instituição systematica da operação.

No ponto de vista da continuidade dogmatica, a preferencia cabe á concepção da divisão como inversa da multiplicação. De outra fórma não é possivel estabelecer a ligação entre o calculo fetichico e o conjuncto do calculo theologico.

Mas, as denominações que prevaleceram para caracterisar os numeros dados (*dividendo*, do latim *dividendus*, que deve ser dividido, e *divisor*, do latim *divisos*, que divide) e mesmo o numero pedido (*quociente*, do latim *quoties*, quantas partes), lembrarão eternamente a filiação historica. Assim, o ultimo dos problemas que historicamente conduziu á divisão é o que fornece o élo theorico entre ella e as operações anteriores e, portanto, o nexo com o conjuncto da arithmetica fetichica. »

232. — SOBRE O PONTO DE VISTA QUE DEVE PREVALECER NA INSTITUIÇÃO SYSTEMATICA DA OPERAÇÃO. — « Considerando, porém, a instiiuição systematica da operação, a primazia deve ser dada ao problema médio.

Vamos vêr, com effeito, que todo o processo é baseado essencialmente na concepção da divisão como consistindo em determinar quantas vezes o divisor se contém no dividendo; além de que é dessa consideração que resulta o surto do calculo pela instituição fraccionaria.

A consideração da divisão, como o inverso da multiplicação, concorre no calculo para tal instituição. » (19)

§ x' (20)

Instituição systematica da Divisão

233.— MEIOS DE DETERMINAR O QUOCIENTE POR TENTATIVAS. — Antes de expôr a pratica systematica da divisão, consideremos o maior aperfeiçoamento de que são susceptiveis os processos espontaneos.

Evidentemente esses processos são impraticaveis na sua fórma primitiva, por pouco que o quociente se torne consideravel. Mas, si o quociente tiver um unico algarismo (o que se reconhece vendo si o producto do divisor pela base numeral dá um numero maior que o dividendo), a operação é exequivel por qualquer delles.

Nas outras hypotheses, o processo espontaneo que comporta maior aperfeiçoamento é o que resulta da divisão como inversa da multiplicação. Com effeito, similhante ponto de vista conduz immediatamente a determinar dois numeros que comprehendem o pedido, indicando as potencias da base entre as quaes fica comprehendido o quociente. Isto posto, escolhendo um numero entre esses limites, mais approximado daquelle que estiver mais perto do quociente, ter-se-ha um novo limite superior ou inferior. Procedendo assim, successivamente, no fim de um numero sufficiente de ensaios, poder-se-ha determinar o quociente exacto, si elle existir; ou então, dois numeros consecutivos que o comprehendam.

---

(19) Das notas do Curso do Sr. R. T. Mendes.

(20) Letra copa, que assim accentuada exprime o numero *cikõssi* (vinte).

Quanto ao resto, será determinado, subtrahindo do dividendo o maior multiplo do divisor que elle contém, e que o conjuncto do calculo effectuado evidencia qual seja.

Comprehende-se, porém, que similhante processo tornar-se-ha laboriosissimo e mesmo impraticavel quando o quociente fôr um tanto consideravel, por causa do numero extraordinario de ensaios necessarios á sua determinação.

Para julgar de tal impraticabilidade basta notar que taes ensaios, apenas em numero de 8, quando o quociente se acha comprehendido entre 1 e 10; elevam-se a 88, quando estiver entre 10 e 100; a 898, quando achar-se entre 100 e 1000; a 8998, quando estiver entre 1000 e 10000; e assim por diante.

Sómente no caso particularissimo em que o quociente fosse uma dessas potencias, é que similhante processo poderia ser empregado sem inconveniente.

Quanto ao outro, que consiste, como vimos, em subtrahir o divisor do dividendo até que este se esgote, ou até que deixe um *resto* menor que o *divisor*, é facil reconhecer que se torna ainda mais impraticavel por causa do excessivo numero de subtracções que exige, quando o quociente fôr consideravel.

Dahi resulta, pois, a necessidade de instituir um processo systematico para realisar a operação, qualquer que seja o quociente; porquanto acabamos de vêr que os processos espontaneos sómente convêm ao caso em que o quociente tem um só algarismo.

234.— Vejamos, porém, antes disso, a relativação das noções de *quociente* e *resto*, que as considerações precedentes deixam perceber. Durante muito tempo as concepções do quociente e do resto foram absolutas.

Considerava-se sempre o quociente como o maior dos numeros que multiplicado pelo divisor davam productos inferiores ao dividendo. O resto era desde então o excesso

do dividendo sobre esse maior multiplo do divisor nelle contido.

O ascendente, porém, do espirito positivo conseguio por fim relativar essas duas noções.

Com effeito, em abstracto, deve-se preferir o erro menor, quer esse erro seja para mais, quer seja para menos. Teve-se, pois, de preferir para quociente o numero, maior ou menor do que o quociente, que produzir o multiplo do divisor que mais se approxima do dividendo, e, cuja differença para com este fôr menor.

Concretamente, o exame de cada caso é só o que póde esclarecer se convém tomar um quociente *deficiente*, ou um quociente por *excesso*.

No 1° caso, *o dividendo será igual ao praducto do divisor pelo quociente mais o resto, si houver*; no 2° caso, *será igual ao producto do divisor pelo quociente menos o resto, si houver.*

235.— ESTUDO DA OPERAÇÃO SYSTEMATICA.— Qualquer dos dois processos espontaneos permittindo a determinação do quociente no caso em que este tem apenas um algarismo, é obvio que a operação systematica deve consistir aqui, como nas tres anteriores, em reduzir a este caso fundamental aquelle em que o quociente tem mais de um algarismo. Porquanto será desde então possivel determinar um a um os algarismos das unidades de diversas ordens que, segundo a numeração systematica, o devem constituir.

Mas, similhante reducção exige que se conheça préviamente o numero de algarismos que deve ter o quociente. A theoria da divisão suscita, pois, essa determinação prévia que não tem analoga nas operações anteriores, afim de conhecer o numero de algarismos do quociente, para dirigir depois sua pesquiza analytica.

Concebida directamente, similhante determinação consiste em discernir entre que potencias de 10 o quociente se

acha comprehendido, o que póde facilmente realizar-se comparando com o dividendo o producto das mesmas potencias pelo divisor.

Tendo-se, por exemplo, de dividir 18510 por 27, vê-se logo que o quociente está comprehendido entre 100 e 1000. Porque o producto de 100 por 27 é 2700, numero menor do que o dividendo; e o producto de 1000 por 27 é 27000, maior do que elle. Ora, o quociente achando-se comprehendido entre o menor numero de tres e o menor de quatro algarismos, terá necessariamente tres algarismos.

Tendo-se ainda de dividir 8564 por 47, verifica-se immediatamente que o quociente procurado deve estar comprehendido entre 100 e 1000. Porque o producto de 100 pelo divisor é 4700, numero menor do que o dividendo; e o producto de 1000 pelo mesmo divisor é 47000, numero maior do que o dividendo. Ora, o quociente, achando-se comprehendido entre 100 e 1000, terá necessariamente tres algarismos, porquanto 100 é o menor numero de tres e 1000 é o menor numero de quatro algarismos.

Reconhece-se assim que *o numero de algarismos do quociente é igual á differença entre o numero de algarismos do dividendo e do divisor, ou essa differença augmentada de uma unidade*, si o primeiro algarismo da esquerda do dividendo fôr maior do que o primeiro algarismo do divisor. (Si ambos os algarismos forem iguaes decide-se pelos seguintes).

236.—RESOLUÇÃO DO 1º CASO: DETERMINAÇÃO DO QUOCIENTE QUANDO É SIMPLES.— Quando o quociente fôr representado por um unico algarismo, tem pouca importancia que este seja determinado por subtracções successivas ou por tateamento baseado no ensaio dos diversos factores simples. Pelo primeiro processo ter-se-ha de effectuar no maximo nove subtracções successivas no systema decimal, o que é sempre praticavel.

Pelo segundo processo, porém, os tateamentos podem ser abreviados pela determinação do maior, e mesmo do menor valor que póde ter o algarismo que deve constituir o quociente.

Supponhamos, por exemplo, que se trata de dividir 25346 por 3621.

O dividendo sendo menor do que 10 vezes o divisor, o quociente é menor do que 10 e, portanto, tem um só algarismo. Para determinal-o, pois, bastaria multiplicar successivamente pelo divisor os numeros 9, 8, 7... até encontrar um cujo producto se contivesse no dividendo.

Póde-se, porém, abreviar estas tentativas, reflectindo que o producto do quociente procurado pelo divisor, deve produzir o dividendo ou pelo menos o maior multiplo do divisor nelle contido; e que, por conseguinte, o producto do quociente pelo algarismo de ordem mais elevada do divisor não póde exceder ao primeiro ou aos dois primeiros algarismos de ordem mais elevada do dividendo.

Assim, no exemplo acima, suppondo que o divisor ficasse reduzido a 3 milhares, é claro que ellas deveriam ser contidas nas 25 do dividendo; porquanto o producto pelos milhares do divisor, dando pelo menos 3 milhares, não póde conter-se na parte do dividendo representada pelas 346 unidades, menor que 1 milhar ou 1000 unidades.

Portanto, para achar o maior numero de vezes que 25346 contém os 3 milhares, basta examinar o menor numero de vezes que 25 milhares contém 3 milhares, ou quantas vezes 25 contém 3, que são 8. Ora, si 25346 não contém 3 milhares ou 3000 unidades mais de 8 vezes, com mais forte razão não conterá mais vezes o divisor 3621, numero maior que 3000.

O maior valor que póde ter o quociente é portanto 8. Mas, póde acontecer que o quociente buscado seja menor; porque o facto de 25346 conter 8 vezes 3000, dá lugar a

suppôr que contenha menos vezes um numero maior qual seja 3621. Logo, o algarismo ensaiado, 8, póde ser mais forte que o verdadeiro, e torna-se necessario verificar si isso tem lugar. Para esse fim multiplicamos 8 pelo divisor 3621; e como o producto obtido, 28968, é maior do que o dividendo 25346, concluimos que este não chega a conter o divisor 8 vezes, ou que o quociente não chega a 8.

Tentando 7, achamos que o producto de 7 por 3621 é 25347, ainda maior do que o dividendo.

Tentando emfim 6, vemos que este é o quociente procurado, por isso que 6 vezes 3621 produz 21726 — numero menor do que o dividendo.

Subtrahindo-o deste ultimo encontramos 3620, que, sendo menor do que o divisor, é o resto da divisão.

Eis o typo do calculo, que fazemos nos systemas decimal e septimal; naquelle, para abreviar a operação, subtrahimos mentalmente os productos parciaes dos algarismos do divisor pelo quociente, á medida que são obtidos, dos que lhes correspondem no dividendo:

```
25346 | 3621          25346 | 3621
 3620 | 6             25335 | 5
                      -----
                         11
```

Póde acontecer que, não tendo ensaiado numeros successivos e julgando-se tomar um algarismo muito forte, experimente-se ao contrario um muito fraco; seremos advertidos desse engano si o resto da operação fôr maior do que o divisor.

Póde-se, todavia, evital-o fixando de antemão qual o menor valor que póde tomar o quociente.

Basta para isso augmentar de uma unidade o primeiro algarismo do divisor, e vêr quantas vezes é elle contido no primeiro ou nos dois primeiros algarismos do dividendo.

(20a) Assim, no exemplo acima, augmentando de uma unidade o primeiro algarismo do divisor e vendo o maior numero de vezes que os dois primeiros do dividendo, isto é, 25 milhares contém 4 milhares, achamos immediatamente que 6 é o menor valor que póde tomar o quociente. Com effeito, si o dividendo contém 6 vezes 4000, com mais forte razão elle conterá pelo menos 6 vezes o divisor considerado 3621, que é menor do que 4000. Assim o quociente procurado é pelo menos 6.

Estas considerações nos mostram, ao mesmo tempo, que se poderia fazer os ensaios ou tentativas em ordem ascendente ao envez de proceder segundo a ordem descendente, como fizemos acima.

Deve-se, porém, preferir os ensaios descendentes aos ascendentes, não como menos numerosos, mas como realizando-se mais rapidamente; porque se reconhece a impossibilidade mais depressa do que a insufficiencia. Esta precisa para ser constatada que se conduza o ensaio quasi até o fim.

Comprehende-se finalmente a possibilidade de restringir o mais possivel as tentativas a fazer, determinando de antemão de um lado o maior, e do outro o menor dos valores que póde ter o quociente.

Dividindo com effeito, o primeiro ou os dois primeiros algarismos do dividendo, a principio pelo primeiro algarismo do divisor, e depois por esse algarismo augmentado de uma unidade, acabamos de vêr que o quociente procurado será um dos dois numeros assim obtidos, ou estará comprehendido entre elles, não havendo portanto mais incertezas nos ensaios, que podem mesmo fazer-se mentalmente.

Em muitas circumstancias ha um meio facil para só fazer uma tentativa: consiste em olhar o primeiro algaris-

---

(20a) Condorcet. *Methodo para aprender a contar com segurança e facilidade*. Opusculo escripto por Condorcet quando já se achava condemnado á morte e refugiado em casa de Me. Vernet (1743-1749).

mo á esquerda do divisor, como augmentado de uma unidade, quando o segundo exceder a 5 ; e fazer igual accrescimo ao numero de unidades da mesma ordem do dividendo. Assim, si tivermos de dividir 27123 por 3678, em lugar de vêr 27 quantas vezes contém 3, procuraremos em 28 quantas vezes ha 4. O numero 7, assim obtido, é effectivamente o quociente da divisão de 27123 por 3678.

Concebe-se, com effeito, que o divisor 3678 estando mais proximo de 4 mil que de 3 mil, ha mais probabilidade de achar-se o quociente procurado, tomando para divisor 4 mil, de preferencia a 3 mil.

Mas, por este modo, corre-se o risco de obter para quociente um algarismo muito fraco, porquanto sabemos que o *quociente diminue quando o divisor augmenta*.

E' para evitar que tal aconteça que se augmenta de uma unidade o numero de milhares do dividendo.

Emfim, vê-se, do que precede, que o inicio dessas tentativas ou ensaios consiste sempre, neste caso, na determinação do quociente do primeiro ou dos dois primeiros algarismos do dividendo pelo primeiro algarismo do divisor. Similhantes quocientes simples, podem sempre ser obtidos, invertendo mentalmente os resultados fornecidos pela *tabella de multiplicação*; onde, como vimos, encontram-se todos elles.

Assim, por ex., sabendo que 8 vezes 7 são 56, percebemos, immediatamente, que 56 contém 8 sete vezes, ou que em 56 ha 7 vezes o numero 8. Os quocientes elementares cujos dividendos não se acham incluidos na mesma tabella, como, por ex., o de 45 por 7, podem tambem ser obtidos, embora approximadamente. Porque o dividendo, achando-se comprehendido entre 42 e 49, o quociente de 45 por 7 se achará evidentemente comprehendido entre os quocientes de 42 e de 49 pelo mesmo numero, isto é, entre 6 e 7, differindo de qualquer destes de menos de uma unidade.

Tomando o quociente *por falta*, 6, vê-se immediatamente que 3 é o resto da divisão.

Taes quocientes podem sempre ser calculados mentalmente; e como são em pequeno numero é possivel retel-o na memoria como acontece no systema decimal.

240. — 2.° No caso em que o quociente é composto, isto é, quando o quociente tem mais de um algarismo, é sempre possivel reduzir esse caso ao precedente, decompondo a divisão total em tantas divisões parciaes quantos forem taes algarismos; o que permittirá, desde então, determinar cada um delles pelo modo acima exposto.

A difficuldade principal consiste aqui em determinar as mais altas unidades de todo o quociente, por meio da parte correspondente do dividendo isoladamente comparada com o divisor.

I. Para determinar o algarismo das unidades de ordem mais elevada, basta reflectir que, conhecidas as potencias da base entre as quaes fica o quociente, seria bastante multiplicar o divisor pela potencia inferior, subtrahir o producto do dividendo tantas vezes quantas forem possiveis e contar o numero de subtracções para ter similhante algarismo. (20b) Mas, esse producto seria um numero representado pelo divisor seguido de zeros, de sorte que as subtracções successivas não affectariam os algarismos do dividendo correspondentes aos zeros.

E o numero destes zeros póde ser previsto, porquanto é igual ao que figura na potencia inferior de 10 a que alludimos; ou é igual á differença entre o numero de algarismos

---

(20b) Suppondo, por ex., que o dividendo contém o divisor mais de 10 e menos de 100 vezes, 20 vezes, por ex., é claro que em vez de subtrahir, successivamente o divisor do dividendo 20 vezes para obter aquelle quociente, chegar-se-hia ao mesmo resultado subtrahindo-o apenas 2 vezes depois de tornal-o 10 vezes maior. Do mesmo modo, si o quociente fôr, por ex., 34, bastará subtrahir o divisor do dividendo 3 vezes, depois de tornal-o 10 vezes maior; e emfim subtrahil-o 4 vezes sem alteral-o. (Condorcet.)

do dividendo e o de algarismos do divisor, quando o primeiro algarismo daquelle fôr maior do que o primeiro deste; e a essa differença diminuida de uma unidade, quando o primeiro daquelle fôr menor do que o primeiro deste.

Portanto, torna-se inutil juntar explicitamente os zeros; basta considerar á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos ha no divisor, ou esses algarismos mais um, si o primeiro algarismo do dividendo fôr menor do que o primeiro do divisor; e subtrahir do numero assim formado o divisor, tantas vezes quantas possiveis.

O numero dessas subtracções indica o primeiro algarismo buscado do quociente. Reconhece-se assim que, para determinar o algarismo das unidades mais elevadas do quociente, basta comparar com o divisor a parte do dividendo que forneceria um quociente de um algarismo, si este dividendo se reduzisse a ella.

Como as subtracções successivas tornam-se morosas e são, por isso, pouco usadas, costuma-se instituir essa observação considerando os algarismos do dividendo sobre os quaes influe o algarismo das unidades mais elevadas do quociente, em virtude da multiplicação do divisor por elle. Pois que, em tal multiplicação, o producto parcial que elle fornece possue tantos algarismos significativos quantos tem o divisor; ou esse numero de algarismos augmentado de uma unidade. Esses algarismos significativos vão seguidos de tantos zeros, quantos faltam para fazer que tal producto se contenha no dividendo menos de dez vezes.

Chega-se assim á mesma conclusão que ha pouco.

Póde-se, pois, applicar á determinação desse primeiro algarismo do quociente, qualquer dos processos seguidos no caso do quociente simples; preferindo-se de ordinario o dos tateamentos, isto é, o baseado na multiplicação, por ser o mais breve. E' o que faremos por isso na determinação dos demais algarismos do quociente.

II. *Determinação dos outros algarismos do quociente*. Determinado o algarismo das unidades mais elevadas, subtrahindo-se do dividendo o producto desse algarismo pelo divisor, obtem-se um resto que não póde mais ser constituido senão pela somma dos productos parciaes dos outros algarismos do quociente pelo divisor.

Mas, é evidente que esse resto, tratado como o dividendo primitivo, fornecerá o segundo algarismo do quociente. Não teremos, pois, ainda para isso, de comparar com o divisor, senão o numero de algarismos do resto que dariam lugar a um quociente simples, si o resto si reduzisse a elle. Reconhece-se assim que só se tem de tomar em consideração, para esse fim, apenas mais um novo algarismo do dividendo primitivo, que se annexará ao conjuncto dos que provêm da subtracção precedente.

Multiplicando esse segundo algarismo do quociente pelo divisor, e subtrahindo o producto da parte do novo dividendo considerado, tem-se um segundo resto.

Este, tratado como o anterior, conduz ao terceiro algarismo do quociente. E assim se prosegue a operação até chegar ao ultimo algarismo do quociente. Este, multiplicado pelo divisor, deve dar um numero igual ao ultimo resto obtido, si a divisão fôr susceptivel de effectuar-se exactamente. No caso contrario, fornecerá um numero menor que esse resto, mas tendo com elle uma differença menor que o divisor.

Esse quociente e esse resto podem ser apreciados *por falta ou por excesso,* conforme vimos

Conclusão.—«Vê-se, pois, em resumo que a divisão systematica decompõe o dividendo em diversos productos parciaes que correspondem ás diversas unidades do quociente.

Mas, essa decomposição é feita successivamente; ao passo que nas operações fetichicas a decomposição da operação

complexa, nas operações elementares, effectua-se simultaneamente.

Demais, ao passo que nas operações fetichicas, a determinação faz-se, a partir das unidades de ordem inferior, para as de ordem superior, na divisão tem-se de começar pelas unidades mais elevadas. (20c)

Mas, a reducção do caso composto ao caso simples effectua-se com a mesma efficacia por toda a parte. Porque se determina successivamente os algarismos do quociente composto, com a mesma facilidade com que se determina o algarismo unico do quociente simples.»

241 — Exame da marcha do calculo e construcção da regra pratica da operação. — Para melhor comprehender o que fica dito, supponhamos que se trata de dividir 125346 por 243. O dividendo sendo maior do que 10 vezes o divisor, o quociente tem mais de um algarismo; e como 100 e 1000 multiplicados pelo divisor, produzem respectivamente dois numeros que comprehendem o dividendo, concluimos que o quociente acha-se comprehendido entre 100 e 1000, tendo portanto 3 algarismos.

Para determinal-os, notemos que o dividendo devendo conter o producto do divisor pelo quociente procurado, contém necessariamente tres productos parciaes, a saber: o producto do divisor pelas centenas do quociente; o producto do divisor pelas dezenas do quociente; e o producto do divisor pelas unidades do quociente.

(20c) E' claro que se procede á operação, á partir das unidades mais elevadas, porque o dividendo representa o producto do divisor pelos diversos algarismos do quociente, e na formação desses productos ha reservas que se vão agglomerar á parte esquerda do numero; e, como essas reservas não podem ser previstas, é preciso desenglobal-as successivamente, o que não se póde fazer senão procedendo da esquerda para a direita.

Si procurarmos effectuar a operação da divisão, começando-a pela direita do dividendo, não saberemos assignalar nelle a parte em que precisamente reside um qualquer dos productos parciaes do divisor por algum dos algarismos da parte inteira do quociente; e não poderemos, por isso, proceder á determinação directa daquelles algarismos.

Ora, o producto do divisor pelas centenas do quociente, produzindo pelo menos um certo numero de centenas, não póde se achar contido senão nas 1253 centenas do dividendo. Abstrahindo, pois, das 4 dezenas e 6 unidades, e dividindo as 1253 centenas pelo divisor 243, obtemos o algarismo das centenas do quociente, que é 5. Multiplicando este numero pelo divisor e subtrahindo o resultado do dividendo, o resto obtido conterá o producto do divisor pelas dezenas e pelas unidades do quociente.

Para obter as dezenas deste, observemos agora que o producto do divisor pelas dezenas do quociente perfaz pelo menos um certo numero de dezenas, e não póde, por conseguinte, achar-se senão nas 38 dezenas do resto. Abstrahindo, pois, das 6 unidades, e dividindo as 384 dezenas do resto pelo divisor, obteremos o algarismo das dezenas do quociente, que é 1.

Multiplicando este algarismo pelo divisor e subtrahindo o producto do dividendo parcial considerado, obtemos um resto, 1416, que deve conter o producto do divisor pelas unidades do quociente. Dividindo, pois, 1416 pelo divisor, achamos, emfim, o algarismo das unidades, que é 5.

Multiplicando este algarismo pelo divisor, e subtrahindo o producto do ultimo dividendo parcial, obtem-se 201, que sendo menor do que o divisor, é o resto (por falta) da divisão, e evidencia não ser esta exacta.

O quociente obtido 515 é, pois, o maior multiplo do divisor contido no dividendo.

Para verificar a operação bastará multiplicar o quociente obtido, 515, pelo divisor 243, e addiccionar ao producto o resto 201 : si não houve erro, a somma deve ser igual ao dividendo.

Eis o typo do calculo, que fazemos tambem no systema septimal :

```
125346 | 243          125346 | 243
121500 |----          106200 |----
------ | 515          ------ | 350
003846 |               16146 |
  2430                 16110
  ----                 -----
  1416                    36
  1215
  ----
   201
```

Na pratica da operação não ha necessidade de escrever os zeros á direita dos productos do divisor pelos algarismos successivamente obtidos para o quociente; abreviando-se ainda o calculo pela subtracção mental dos algarismos de taes productos daquelles que lhes correspondem no dividendo considerado. A' direita de cada resto, assim obtido, vai-se escrevendo o algarismo seguinte do mesmo dividendo, como se vê abaixo:

125346	243
384	515
1416	
201	

125346	243
1614	350
36	

Póde-se, emfim, systematisar a pratica da operação, construindo a seguinte regra:

Escreve-se o dividendo e á sua direita o divisor, separados por uma linha vertical.

Traça-se por baixo do divisor uma linha horisontal. Separa-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos bastem para formar o menor numero possivel que contenha o divisor; divide-se aquelle por este e obtem-se o 1º algarismo do quociente. Multiplica-se este algarismo pelo divisor, e subtrae-se o producto da parte considerada no dividendo.

Escreve-se á direita do resto o algarismo seguinte do mesmo dividendo e divide-se o numero assim formado pelo divisor, o que fornecerá o 2º algarismo do quociente. Multiplica-se esse algarismo pelo divisor e subtrae-se o producto do dividendo parcial considerado. Escreve-se á direita do resto o algarismo seguinte do dividendo proposto e divide-se o numero obtido pelo divisor, o que dará o 3º algarismo do quociente.

Assim se continúa até ter empregado todos os algarismos do dividendo proposto.

Si um dos dividendos parciaes fôr menor que o divisor, escreve-se um zero no quociente, e ao lado do dividendo parcial, o seguinte algarismo do dividendo e procede-se como indicamos.

Quando o divisor tem um só algarismo, póde-se abreviar a regra ordinaria, no que se refere á disposição do calculo, escrevendo logo os algarismos do quociente abaixo daquelles do dividendo que os fornecem, e o resto por cima.

Eis o typo do calculo para dividir 3563218 por 7:

$$\begin{array}{r|l} \overset{1}{3563218} & 7 \\ \cline{2-2} 509031 & \end{array}$$

Multiplicando o divisor 7 pelo quociente 509031 e addiccionando o resto 1, obtem-se o dividendo, o que prova estar certa a operação.

Si o divisor termina em zeros, póde supprimir-se esses zeros, e á direita do dividendo um numero igual de algarismos: o quociente da divisão dos numeros assim obtidos é o mesmo que o da primeira; mas o resto será igual ao resto da outra augmentado do numero formado dos algarismos separados no dividendo.

Seja 543628 um numero que queremos dividir por 7000; o quociente da divisão de 543628 por 7000 será igual ao quociente de 543 por 7. Com effeito, 543 é igual a 7 multiplicado por 77 mais 4; isto é, 543 unidades de mil igualam 77 vezes 7 unidades de mil mais 4 unidades de mil; 543000, é igual a 7000 multiplicado por 77 mais 4000; e, por conseguinte, 543628 é igual a 7000 multiplicado por 77 mais 4628. Portanto, 4628 é o resto, por falta, desta ultima divisão, por ser menor do que 7000.

Si o dividendo e o divisor terminam em zeros, póde supprimir-se, em ambos, o mesmo numero de zeros e isto

não altera o quociente; mas o resto fica multiplicado pela unidade seguida de tantos zeros quantos se supprimiram.

Assim, o quociente da divisão de 260000 por 3000 é o mesmo que o de 260 por 3. Com effeito, 260 é igual a 3 multiplicado por 86 mais 2; isto é, 260 unidades igualam 86 vezes 3 unidades mais 2 unidades; e, por conseguinte, 260 unidades de mil igualam 86 vezes 3 unidades de mil mais 2 unidades de mil; isto é, 260000 é igual a 3000 multiplicado por 86 mais 2000. No caso em que a divisão é exacta, vê-se logo que a suppressão de igual numero de zeros no dividendo e no divisor em nada altera o resultado da operação.

Assim, por exemplo, dividir 24000 por 4000 equivale a dividir 24 por 4.

242. — TERMOS DA DIVISÃO E INFLUENCIA DE SUAS VARIAÇÕES SOBRE O QUOCIENTE. — No exemplo precedente, a suppressão dos tres zeros, no dividendo e no divisor, importa em tornal-os 1000 vezes menores; porque si o tornamos 10, 100, 1000... vezes maior, escrevendo-lhe á direita um, dois, tres... zeros, é evidente que tornal-o-hemos 10, 100, 1000... vezes menor, procedendo ao contrario. Vimos que o quociente não soffreu alteração, e tal circumstancia nos leva a examinar mais detidamente as variações do quociente, em relação ás que podem affectar os dois termos da divisão, isolada ou conjunctamente.

Similhante apreciação póde ser resumida nas seguintes propriedades:

1.ª *Si a divisão fôr exacta, dividindo ou multiplicando o dividendo por um numero inteiro, o quociente fica dividido ou multiplicado por esse numero.*

Com effeito, o dividendo sendo então igual ao producto do divisor pelo quociente, é claro que, si dividirmos ou multiplicarmos o producto por um certo numero, conservando constante um de seus factores (o divisor), será preciso que

o outro factor (quociente) fique dividido ou multiplicado pelo mesmo numero, sem o que o mesmo producto não será verdadeiro.

2.ª *Si a divisão fôr exacta, dividindo ou multiplicando o divisor por um numero inteiro, o quociente ficará multiplicado ou dividido por esse numero.*

Porque o dividendo sendo então um producto de dois factores, é obvio que si tornarmos um delles (divisor) um certo numero de vezes menor ou maior, será preciso que o outro (quociente) se torne o mesmo numero de vezes maior ou menor; por isso que o producto não deve soffrer alteração.

3.ª *Si a divisão fôr exacta, dividindo ou multiplicando o dividendo e o divisor por um mesmo numero inteiro, o quociente não se altera.*

Com effeito, o quociente torna-se um certo numero de vezes maior ou menor em consequencia da variação do dividendo; mas, em compensação, elle torna-se o mesmo numero de vezes maior ou menor, por causa da variação do divisor: Logo não soffrerá alteração alguma.

4.ª *Si a divisão não fôr exacta, dividindo ou multiplicando o dividendo e o divisor por um mesmo numero, o quociente não se altera; mas o resto virá dividido ou multiplicado por aquelle numero.*

Com effeito, a constancia do quociente torna-se evidente em vista do que dissemos precedentemente.

Quanto ao resto, notemos que elle póde ser visto como o resultado de uma subtracção entre o dividendo e o producto do divisor pelo quociente: Mas, quando os termos de uma differença tornam-se um certo numero de vezes menores ou maiores, sabemos que a differença fica o mesmo numero de vezes menor ou maior.

Si se tratar de um resto por excesso, a proposição ainda é verdadeira.

Neste caso, o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente menos o resto; de sorte que o dividendo, addiccionado ao resto, torna-se equivalente ao producto do divisor pelo quociente. Ora, assim considerado, o resto é parcella de uma somma na qual a outra parcella torna-se com a somma um certo numero de vezes menores ou maiores, o que exige torne-se elle o mesmo numero de vezes menor ou maior.

5.ª *Si augmentarmos ou diminuirmos o dividendo de um multiplo do divisor, o resto não se altera, mas o quociente virá augmentado ou diminuido do mesmo multiplo da unidade.*

Com effeito, o dividendo continuará a ser igual a um multiplo, maior ou menor do divisor; e, por conseguinte, o resto não soffrerá alteração, visto como sabemos que uma differença não muda quando ambos os seus termos são augmentados ou diminuidos da mesma quantidade. Emfim, o quociente indicando quantas vezes o dividendo contém o divisor, deverá vir augmentado ou diminuido de 1, 2, 3... unidades, quando o dividendo fôr augmentado ou diminuido de 1, 2, 3... vezes o mesmo divisor.

Desta propriedade resulta immediatamente que: « *para dividir uma somma ou uma differença por um numero, póde-se dividir cada parcella da somma ou cada termo da differença pelo numero, e addiccionar ou subtrahir os quocientes parciaes* ».

Porque augmentando ou diminuindo o 1º dividendo de um multiplo do divisor, o quociente total da somma ou differença obtidas, pelo mesmo divisor, é igual á somma ou differença dos dois quocientes parciaes mais o resto da 1ª divisão.

Si o numero addiccionado ao 1º dividendo fôr maior do que um multiplo do divisor, a segunda divisão parcial deixará um resto, que, addiccionado ao 1º, poderá formar um numero igual ao divisor: de sorte que, neste caso, a somma

daquelles quocientes parciaes deverá ser augmentada de uma unidade, para equivaler ao quociente total.

Esta propriedade póde tambem ser deduzida de uma das definições da divisão. (20d)

Com effeito, dividir uma somma (ou differença) por um numero inteiro é tornal-a esse numero de vezes menor. Ora, é evidente que se póde tornar uma grandeza um certo numero de vezes menor, tornando menor cada uma de suas partes o mesmo numero de vezes.

§ κα' (21)

Divisibilidade dos numeros. Provas pelos divisores (21a)

243. — Doutrina da divisibilidade. — A divisão de um numero inteiro por outro não se effectuando, exactamente, na maioria dos casos, as necessidades praticas e theoricas levaram naturalmente o espirito humano a procurar conhecer quando a divisibilidade tem lugar, sem effectuar a operação.

Similhante problema, como muitos outros, não pôde ser resolvido em consequencia da fraqueza de nosso poder mental. Entretanto, foi possivel determinar os caracteres de divisibilidade dos numeros inteiros pelos divisores mais simples, representados pelos primeiros termos da escala numerica, mais proximos da base numeral adoptada.

(20d) Dividir um numero em tantas partes iguaes quantas são as unidades de outro: O quociente procurado é o valor de cada parte, que é tantas vezes menor do que o dividendo, quantas são as unidades do divisor.

(21) Numero — *eikŏssi kaí éis ; eikŏssi éis ;* ou *éis kaí eikŏssi*—(vinte e um).

(21a) O programma official exige a theoria da *divisibilidade* dos numeros, que julgamos ficar bem collocada aqui.

A apreciação de similhantes caracteres exige, porém, como fundamento, a instituição dos seguintes principios :

1.° *Todo divisor das parcellas de uma somma é divisor da somma.*

Com effeito, já vimos que se póde dividir uma somma por um numero, dividindo cada parcella da somma por este numero e addicionando os quocientes. Ora, cada uma das parcellas sendo por hypothese um multiplo do divisor empregado, sua somma será tambem o multiplo do mesmo divisor : pois que a somma dos multiplos de um numero é evidentemente um multiplo deste numero.

Por ex., 2 dividindo exactamente 180 e 38, divide sua somma 218.

2.° *Todo divisor de dois numeros divide sua differença.*

Com effeito, vimos que se póde dividir uma differença por um numero, dividindo cada termo da differença pelo mesmo numero e subtrahindo os quocientes. Ora, cada um dos numeros dados sendo o multiplo do divisor, sua differença tambem o será.

Assim, por ex., 5 dividindo exactamente 400 e 25, divide sua differença 375.

Como o minuendo equivale á somma do subtrahendo com o resto ou differença, póde-se dizer que « *todo o divisor da somma e de uma das parcellas divide a outra parcella* ».

3.° *Todo o numero que é divisor de outro divide os multiplos deste outro.*

Esta proposição é consequencia da 1ª, porque o multiplo de um numero não é mais do que a somma de muitos numeros iguaes a elle, e o divisor das parcellas é, como vimos, divisor da somma.

Assim, por exemplo, 2 sendo divisor de 100, o será de 2 vezes 100, de 3 vezes 100 ou 300 e etc.

O multiplo de um numero inteiro sendo o producto delle por outro qualquer, póde-se, pois, dizer que « *todo o*

numero que divide um dos factores de um producto divide tambem o producto».

4.° *Todo o numero que dividir uma das parcellas de uma somma e não dividir a outra tambem não divide a somma; e os restos das divisões da somma e da parcella não divisiveis pelo mesmo numero serão iguaes.*

Em primeiro lugar, percebe-se que a somma não póde ser divisivel pelo divisor de que se trata; porque, do contrario, sendo ella e uma de suas partes divisiveis por um numero, a outra tambem o seria (2°), o que é contrario á hypothese. (21b)

Em segundo lugar, o resto da parte não divisivel sendo o unico que existe da divisão das parcellas, deve ser igual ao da somma considerada. Porque este ultimo resto representa o excesso da somma sobre o producto do divisor pelo quociente total, e aquelle póde ser considerado como equivalente ao excesso da somma das parcellas sobre o producto do mesmo divisor pela somma dos quocientes parciaes. Ora, a somma das parcellas equivalendo ao todo, e a somma dos quocientes parciaes equivalendo ao quociente total, as differenças serão tambem equivalentes, porque duas quantidades iguaes a uma terceira são iguaes entre si.

244. — EXAME DA DIVISIBILIDADE POR 2, 5 E SUAS POTENCIAS. — Estabelecidos estes principios preliminares, vejamos as condições de divisibilidade de um numero qualquer, escripto no systema decimal, pelos divisores 2 e 5 desta base e pelas potencias dos mesmos divisores. Taes caracteres resultam das seguintes proposições:

1.ª *Toda potencia de 10 é divisivel pelos factores 2 e 5, elevados á mesma potencia.*

Com effeito, 10, igual a 2 vezes 5, contém 2 e 5 uma vez; 100 ou a 2ª potencia de 10, equivalente a 10 vezes 10,

(21b) Este modo de demonstrar era chamado pelos antigos demonstração por *absurdo*, que afinal é uma simples deducção.

conterá portanto os factores 2 e 5 duas vezes; 1000 ou a 3ª potencia de 10, equivalente a 100 vezes 10, conterá, pois, os factores 2 e 5 tres vezes; e assim por diante, o que faz induzir a lei. (21c)

2.ª *Todo o numero formado por um algarismo significativo, seguido de zeros, é divisivel pelos factores 2 e 5 elevados a uma potencia indicada pelo numero de zeros.*

Com effeito, um tal numero é igual a um multiplo de 10 ou de suas potencias; e os factores 2 e 5 dividindo estas, dividem seus multiplos. (243—3º). Assim, por exemplo, 40000 sendo igual a 4 vezes 10000, é divisivel por 2 e 5 elevados á 4ª potencia, pois que estes são divisores da 4ª potencia de 10.

3.ª Um numero inteiro será divisivel por qualquer dos factores 2 ou 5 elevados á 1ª, 2ª, 3ª... potencias, quando o seu primeiro, ou os 2 primeiros, ou os 3 primeiros algarismos da direita, considerados como unidades simples, forem respectivamente divisiveis pela potencia correspondente do mesmo factor.

Com effeito, um numero inteiro, qualquer que elle seja, póde sempre ser decomposto em dois outros, o 1º terminado em zeros e o 2º formado pelos algarismos restantes.

O 1º sendo divisivel pela potencia de 2 ou de 5 correspondente ao numero de zeros, é claro que, si o 2º o fôr, o numero dado será divisivel pela potencia de que se trata. (243—1ª). No caso contrario, o resto da divisão do numero dado pela potencia de 2, ou de 5, será igual ao resto da divisão da 2ª parte pela mesma potencia. (243—4ª)

Considerando, por exemplo, o numero 45678, vê-se immediatamente que é divisivel por 2, porque o seu ultimo algarismo 8 o é tambem. Elle se decompõe, com effeito,

(21c) Desta proposição resulta que se póde multiplicar um numero por 25, multiplicando-o por 100 e dividindo o producto por 4; por 125, multiplicando-o por 1000 e dividindo o producto por 8; e assim por diante.

na somma 45670 mais 8. Ora, a primeira parcella sendo divisivel por 2, em vista de terminar em zero, e a segunda o sendo ainda, o numero tambem o será. No caso contrario, o resto de sua divisão por 2 seria o daquelle algarismo por este divisor.

O mesmo numero é ainda divisivel pela 2ª potencia de 2, isto é, por 4, visto como os dois ultimos algarismos formam o numero 78, que é divisivel por 4.

Os tres ultimos algarismos não sendo divisiveis pela 3ª potencia de 2 ou 8, o numero tambem não é; e o resto é 2.

4.ª *Conclusão*. Concluimos pois: 1°, que todo o numero terminado em zero, ou em um algarismo divisivel por 2, ou por 5, é divisivel por 2 ou por 5; 2°, que todo o numero terminado por dois zeros, ou por dois algarismos que formem um numero divisivel por 4, ou por 25, será divisivel por 4 ou 25; 3°, que todo o numero terminado em tres zeros, ou em tres algarismos que formem um numero divisivel por 8, ou 125, será divisivel por 8 ou 125; e assim por diante.

245.— INSTITUIÇÃO DA DIVISIBILIDADE POR 3, 6, 7 E 9. — Tratemos agora da divisibilidade de um numero inteiro qualquer de base decimal pelos factores que não entram nesta base e que lhe são inferiores:

I.— *Divisibilidade por 3*. Adoptando a marcha do caso precedente, conclue-se facilmente que:

1.° *Toda a potencia de 10 é um multiplo de 3 mais 1.*

Com effeito, dividindo as potencias successivas de 10 por 3, vê-se que 10 equivale a 3 vezes 3 mais 1; isto é, a um multiplo de 3 mais 1; que 100 equivale a 3 vezes 33 mais 1, isto é, a um multiplo de 3 mais 1; e assim por diante.

2.° *Todo o algarismo significativo seguido de zeros equivale a um multiplo de 3 mais esse algarismo.*

Porque o numero assim formado é uma collecção de unidades de dez, onde cada uma destas é um multiplo de 3 mais 1, equivalendo portanto o conjuncto á um multiplo de 3

mais o numero dellas. Assim é que 4000, por exemplo, igual a 4 vezes 1000, equivale a um multiplo de 3 mais 1, repetido 4 vezes, isto é, a quatro vezes um multiplo de 3 mais 4; do mesmo modo, 5000 equivale a um multiplo de 3 mais 5; e assim por diante.

3.° *Um numero inteiro qualquer é igual a um multiplo de 3 addiccionado á somma dos seus algarismos, considerados como representando unidades simples.*

Porque tal numero decompõe-se em collecções de unidades, e cada uma destas collecções equivale a um multiplo de 3 mais o algarismo respectivo; de sorte que o conjuncto das collecções equivale a um multiplo de 3 mais a somma dos algarismos do numero dado.

Assim é, por exemplo, que 245, igual a 200 mais 40 e mais 5, compõe-se de um multiplo de 3 mais 2 com um multiplo de 3 mais 4, e finalmente com 5; o que equivale a dizer que este numero é formado pela somma de um multiplo de 3 com os algarismos 2, 4 e 5, considerados como unidades simples.

4.° *Conclusão.* Do que precede conclue-se immediatamente que « *um numero é divisivel por 3 quando a somma dos seus algarismos, considerados como unidades simples, fôr 3 ou multiplo de 3* (243—1°); *no caso contrario, o resto da divisão do mesmo numero por 3 será igual ao resto da divisão daquella somma por esse divisor.* (243—4°)».

Assim é que 234 é divisivel por 3, porque a somma de seus algarismos é 9, multiplo de 3; pela mesma razão 2 é o resto da divisão de 5678 por 3, porquanto é tambem de 26, somma de seus algarismos.

II.— *Divisibilidade por 6. Todo o numero inteiro que fôr ao mesmo tempo divisivel por 2 e por 3 sel-o-ha por 6.*

Com effeito, si assim não fosse, dividindo o numero considerado por 3, o quociente obtido não conteria 2, isto é, não seria par; mas então, o producto deste quociente por

3, não reproduziria o numero par proposto; porquanto o producto de um numero impar por outro é sempre impar, conforme mostra a tabella da multiplicação.

Assim, por ex., 324 sendo divisivel por 2 e por 3, é tambem por 6, producto desses factores primos. (21d)

III. — *Divisibilidade por 9.* Adoptando ainda a mesma marcha reconhece-se:

1.° *Que toda a potencia de 10 é um multiplo de 9 mais 1.* Assim é que 10 equivale a 9 mais 1; que 100 é igual a 9 vezes 11 mais 1 ou a 99 mais 1 e etc.

2.° *Que todo o numero formado por um algarismo significativo, seguido de zeros, é igual a um multiplo de 9 augmentado daquelle algarismo.*

Assim, por ex., 2000 igual a 2 vezes 1000, equivale a 2 vezes um multiplo de 9 mais 1, e portanto a um multiplo de 9 mais 2.

3.° *Que um numero qualquer é igual a um multiplo de 9, augmentado da somma dos seus algarismos considerados como representando unidades simples.*

Tomando por ex. 468, que se compõe da somma de um multiplo de 9 mais 4 com um multiplo de 9 mais 6 e de 8, vê-se que equivale a um multiplo de 9 augmentado da somma de 4, 6 e 8, isto é, de 18.

4.° *Conclusão. Um numero inteiro qualquer é divisivel por 9, quando a somma dos seus algarismos, tomados como unidades simples, fôr 9 ou um multiplo de 9; no caso contrario o resto da divisão do numero considerado por 9 será igual ao daquella somma pelo mesmo divisor.*

Assim, por ex., o numero 4527 é divisivel por 9, visto como a somma dos algarismos é 18, que é o multiplo de

---

(21d) O numero 6 tem a singular propriedade de ser igual á somma dos seus factores primos 1, 2 e 3. Aos numeros, nestas condições, os antigos chamavam *perfeitos*: existindo apenas um entre 1 e 10, outro entre 10 e 100, outro entre 100 e 1000 e etc.

9; mas 17326 já não é divisivel por 9, porque a somma dos seus algarismos é 19 — que deixa de resto 1.

O caracter de divisibilidade por 3 póde ser considerado como consequencia deste; porque 9 sendo um multiplo de 3, todo o multiplo de 9 tambem será de 3.

246. — DIVISIBILIDADE POR 11. — Temos sómente considerado, até aqui, divisores primos inferiores á base decimal. A instituição dos caracteres de divisibilidade pelos factores primos superiores á mesma base póde ser feita do mesmo modo.

Todavia, a applicação desses caracteres torna-se cada vez mais complicada; porquanto, á medida que os divisores primos tornam-se maiores, os restos das divisões das potencias successivas da base por taes divisores vão differindo cada vez mais. De sorte, que, para constatar a divisibilidade, faz-se mister multiplicar successivamente os algarismos do numero dado pelos restos correspondentes ás unidades collectivas. O divisor 11, por ser igual á base mais um, comporta a tal respeito uma simplificação especial que facilita o seu emprego. Por este motivo vamos apreciar a respectiva condição de divisibilidade.

Para isso, como nos casos precedentes, dividamos, por 11, as potencias successivas de 10. O resto sendo sempre 1 e 10, podemos concluir:

1.° *Toda a potencia par de 10 é um multiplo de 11 mais 1.*

Vê-se, com effeito, após a divisão de taes potencias por 11, que 100 (2ª potencia de 10) é igual a 9 vezes 11 mais 1, ou a um multiplo de 11 mais 1; que 10000 (4ª potencia de 10) é igual a 909 vezes 11 mais 1, isto é, a um multiplo de 11 mais 1 e etc.

2.° *Toda a potencia impar de 10 é igual a um multiplo de 11 mais 10.*

Depois da divisão de taes potencias por 11, vê-se, com effeito, que 1000 (3ª potencia de 10) é igual a 90 vezes 11

mais 10, ou a um multiplo de 11 mais 10; que 1000000 (5ª potencia de 10) é igual a 9090 vezes 11 mais 10, isto é, a um multiplo de 11 mais 10; e assim por diante.

3.° *Que todo o algarismo significativo, seguido de um numero par de zeros, é igual a um multiplo de 11 mais este algarismo, considerado como representando unidades simples.*

Assim é que 500, por ex., por ser igual a 5 vezes 100, equivale a 5 vezes um multiplo de 11 mais 1, ou a um multiplo de 11 mais 5.

4.° *Todo o algarismo significativo, seguido de um numero impar de zeros, é igual a um multiplo de 11 mais esse algarismo multiplicado por 10, isto é, tomado como representando dezenas.*

E' assim, por exemplo, que 5000, por ser igual a 5 vezes 1000, equivale a 5 vezes um multiplo de 11 mais 10, isto é, a 5 vezes o multiplo de 11 mais 5 vezes 10, ou a um multiplo de 11 mais 50.

5.° *Um numero inteiro qualquer equivale a um multiplo de 11, addiccionado á somma dos seus algarismos de ordem impar com os de ordem par, contanto que cada um destes ultimos seja multiplicado por 10.*

Com effeito, pela sua decomposição em collecções de unidades pares e impares, vê-se, por exemplo, que 4389 equivale a um multiplo de 11 augmentado da somma de 40 mais 3 e de 80 mais 9.

6.° *Conclusão*. Podemos, pois, concluir que «*todo o numero em que a somma dos algarismos de ordem impar, considerados como unidades, mais a somma dos algarismos de ordem par, considerados como dezenas, fôr 11 ou multiplo de 11, é exactamente divisivel por 11; no caso contrario, o resto da divisão do numero por 11 será igual ao resto da divisão daquella somma pelo mesmo divisor*».

Assim, por exemplo, no numero 649375, a somma dos algarismos de ordem impar, 17, mais a somma dos algarismos de ordem par, considerados como dezenas 170, produz 187 ; ora, este numero sendo divisivel por 11, o numero proposto será tambem.

A multiplicação por 10 de cada um dos algarismos de ordem par, não só difficulta a applicação desta regra, como torna consideravel a somma finalmente obtida. Todavia, póde-se obviar estes inconvenientes, observando que considerar uma unidade de ordem par como multiplo de 11 mais 10 equivale a tomal-a como multiplo de 11 menos 1 ; porquanto 10 equivale a 11 menos 1. De modo que uma collecção de 2, 3, 4... unidades de ordem par póde ser considerada como um multiplo de 11 menos 2, 3, 4... unidades simples.

Ora, um numero qualquer decompondo-se em collecções de unidades impares e pares, podemos, pois, olhal-o como equivalente a *um multiplo de 11 augmentado da somma dos seus algarismos de ordem impar e diminuido da somma de seus algarismos de ordem par*.

O caracter de divisibilidade por 11 simplifica-se, pois, podendo ser enunciado do seguinte modo : *Um numero é divisivel por 11 quando a somma dos seus algarismos de ordem impar, a contar da direita, menos a somma dos algarismos de ordem par, fôr 0, 11 ou um multiplo de 11 ; no caso contrario, o resto de sua divisão por 11 será igual ao daquella differença pelo mesmo divisor.*

Por exemplo, os numeros 534028 e 968154 são divisiveis por 11; porque a differença entre as sommas dos algarismos impàres e pares é 0 no 1º e 11 no 2º ; sendo que neste ultimo addiccionamos 11 á primeira somma para tornar possivel a subtracção da segunda.

250. — A DIVISIBILIDADE EM QUALQUER SYSTEMA DE NUMERAÇÃO. — Embora conduzindo a resultados diversos,

a doutrina da divisibilidade póde ser instituida do mesmo modo, qualquer que seja a base numeral adoptada. Si esta admitte divisores, todo o numero inteiro que terminar em zero, ou num desses divisores, ou nos seus multiplos, será divisivel pelo divisor considerado.

No systema duodecimal, por exemplo, *todo o numero terminado em zero ou num multiplo de qualquer dos divisores de doze, isto é, em 2, 3, 4 e 6, será divisivel por esse divisor*.

Com effeito, como um numero qualquer escripto neste systema póde sempre ser decomposto em duas partes, uma terminada em zero e, portanto, multipla de doze, e a outra formada pelo seu ultimo algarismo, é obvio que si este fôr divisivel por um dos divisores da base, o numero todo tambem será; se não fôr, o resto obtido será equivalente ao resto da divisão de todo o numero pelo mesmo divisor. Assim, o numero *3a76* é divisivel por 2, por 3 e por 6; dividido por 4, elle dá de resto 2.

Em geral um numero qualquer será divisivel pela 2ª, 3ª... potencia dos divisores da base, si os seus 2, 3... ultimos algarismos o forem tambem.

No caso em que o divisor considerado não é factor da base, a marcha a seguir é essencialmente a mesma que temos adoptado Torna-se, como dissemos, indispensavel apreciar, então, os restos das divisões das potencias successivas da base pelo divisor considerado, e multiplical-os na ordem obtida pelos algarismos correspondentes áquellas potencias no numero proposto.

O numero de restos differentes reproduzindo-se na mesma ordem, será preciso redobrar tambem as suas multiplicações até haver considerado todos os algarismos do numero proposto. Dividindo a somma dos productos parciaes, assim obtidos pelo divisor em questão, ver-se-ha si existe ou não a divisibilidade procurada.

O caso mais favoravel é aquelle em que os restos obtidos são todos iguaes á unidade. Porque, então, tudo se reduzirá a tomar a somma dos algarismos do numero proposto e dividil-a pelo divisor considerado, para julgar da divisibilidade.

O caso menos favoravel é aquelle em que o numero dos restos differentes é igual ao divisor menos uma unidade. Porque, então, será preciso fazer um grande numero de multiplicações, sobretudo si o divisor fôr consideravel e o numero muito grande. (21e)

Todavia, neste caso, é muitas vezes possivel reduzir o periodo dos restos á menor metade do numero considerado como divisor, tomando, em lugar dos restos excedentes, o seu complemento para o mesmo divisor.

Este artificio é de grande vantagem quando apenas um dos restos é maior do que a metade do divisor, como acontece na instituição do caracter de divisibilidade por 11, onde o empregamos, substituindo 10 pelo seu complemento 1, para aquelle divisor. Isto equivale evidentemente a tomar por *excesso* o quociente da potencia correspondente de 10 pelo divisor empregado, o que importa em adoptar um *resto* por *falta* na respectiva divisão.

Assim, por exemplo, tratando-se do divisor 37, poder-se-hia substituir o primeiro resto 26 pelo seu complemento 11, o que equivale a tomar o quociente por excesso, 3. Assim, tambem, no caso do divisor 7, poderemos substituir os restos 6, 4 e 5 pelos seus complementos 1, 3 e 2, de sorte que o numero de restos differentes fica reduzido á metade, isto é, a 3, 2 e 1.

(21e) A este respeito ha muitas excepções: o divisor 37, por exemplo, apenas dá periodicamente para resto 1, 10 e 26. Esse numero 37 é ainda notavel, porque, si o multiplicarmos successivamente por 3, 6, 9, 12.., acharemos os numeros 111, 222, 333, 444...

O caracter da divisibilidade por 7 fica assim simplificado, podendo ser expresso do seguinte modo :

« *Um numero inteiro qualquer será multiplo de 7 quando, dividindo-o em classes de tres algarismos a contar da direita, e multiplicando em cada classe o segundo algarismo por 3 e o terceiro por 2, a differença entre as sommas dos algarismos das classes impares, e a somma dos algarismos das classes pares fôr 0, 7 ou um multiplo de 7 ; no caso contrario, o resto assim obtido será igual ao da divisão do numero proposto por 7.* »

Assim é, por exemplo, que em 123452 a differença entre as duas sommas sendo 14, o numero dado é divisivel por 7.

251. — DIVISIBILIDADE DOS NUMEROS DE BASE SEPTIMAL. — Para melhor comprehender as considerações precedentes, vamos instituir os caracteres de divisibilidade dos numeros de base septimal para os divisores 2, 3, 4, 5, 6 e 11.

Divisibilidade por 2. Dividindo por 2 as potencias successivas da base, 10, 100, 1000..., obtem-se sempre o resto 1. Isso significa que uma unidade de ordem qualquer é igual a um multiplo de 2 mais 1 ; e que, portanto, 2, 3, 4..., collecções de taes unidades valem um multiplo de 2 mais 2, 3, 4... unidades simples.

Ora, um numero qualquer decompondo-se sempre em similhantes collecções, equivale, pois, a um multiplo de 2 augmentado da somma de seus algarismos, considerados como unidades simples: *Portanto, para que um numero seja divisivel por 2, bastará que o seja a somma dos seus algarismos tomados como unidades ; e, no caso contrario, o resto obtido será igual ao de sua divisão pelo mesmo divisor*.

Assim, por exemplo, o numero septimal 215436 dividido por 2, deixa de resto 1.

Divisibilidade por 3. Adoptando a marcha precedente, chega-se aos mesmos resultados.

Assim, por exemplo, o numero septimal 2121 é divisivel por 3.

Conclue-se, pois, que um *numero será divisivel por 3, quando o fôr a somma dos seus algarismos considerados como unidades simples; no caso contrario, o resto obtido é o mesmo da divisão do numero por 3.*

Divisibilidade por 4. Dividindo por 4 as potencias successivas da base, obtem-se periodicamente os restos 3 e 1.

Portanto, toda a potencia impar de 10 é um multiplo de 4 mais 3, e toda a potencia par de 10 é um multiplo de 4 mais 1.

Logo, um algarismo significativo, seguido de numero impar de zeros, é igual a um multiplo de 4 mais 3 vezes o mesmo algarismo; e um algarismo significativo, seguido de numero par de zeros, é igual a um multiplo de 4 mais o mesmo algarismo.

Ora, um numero qualquer decompondo-se sempre em collecções de unidades alternativamente impares e pares, será, portanto, igual a um multiplo de 4 augmentado da somma dos algarismos de ordem par com a somma dos algarismos de ordem impar, sendo cada um destes multiplicado por 3. Por conseguinte, si tal somma fôr divisivel por 4, o numero tambem será; no caso contrario, o resto obtido será o mesmo da divisão delle por 4.

Este symptoma de divisibilidade póde ser simplificado, tomando em lugar do resto 3, maior que metade de 4, o seu complemento 1, para este divisor (o que equivale a tomar os respectivos quocientes por excesso).

Assim procedendo, toda a potencia impar da base tornase igual a um multiplo de 4 menos 1.

E, como as potencias pares equivalem a um multiplo de 4 mais 1, concluimos, como no caso decimal do divisor 11, « *que um numero septimal será divisivel por 4, quando a somma dos algarismos de ordem impar menos a somma*

dos de ordem par fôr 0, 4 ou um multiplo de 4; no caso contrario, o resto obtido será igual ao da divisão do mesmo numero por 4».

Assim é, por exemplo, que 546230 é divisivel por 4; porque a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar 24, e a somma dos algarismos de ordem par, 20, é igual a 4. (Aquella somma sendo 6 augmentamol-a de 3 vezes 4 ou 15, para tornar possivel a subtracção).

Divisibilidade por 5. Dividindo por 5 as potencias successivas da base, obtem-se periodicamente os restos 2, 4, 3 e 1.

Raciocinando, como nos casos precedentes, concluiremos para condição de divisibilidade por 5 que, «dividindo um numero em classes de quatro algarismos, a contar da direita, e multiplicando successivamente o 2° por 2, o 3° por 4 e o 4° por 3, a somma de taes productos com os outros algarismos seja divisivel por 5; no caso contrario, o resto obtido será igual ao da divisão do numero proposto por 5».

Como, porém, os restos 4 e 3 são maiores do que a metade do divisor, póde-se tomar em seu lugar os respectivos comprimentos, 1 e 2.

Bastará, então, « *dividir o numero em classes de dois algarismos, a partir da direita, multiplicar respectivamente por 2 o segundo algarismo de cada classe, subtrahir, em seguida, da somma dos algarismos das classes impares a somma dos algarismos das classes pares e verificar si tal differença é 0, 5 ou multiplo de 5; neste caso o numero será divisivel por 5*».

Assim, em 23651, depois de multiplicar por 2 o segundo e o quarto algarismos, vê-se que é 15 a somma dos algarismos das classes impares e 15 a da classe par; a differença sendo 0, o numero é divisivel por 5. Em 56346512, a somma das classes impares é 20, a das classes pares é 45, após as multiplicações do segundo algarismo por 2: augmentando

a primeira somma de 4 vezes 5 ou 26 para poder subtrahir a segunda, obtem-se a differença 1, que é o resto da divisão do numero proposto por 5.

Divisibilidade por 6. Resulta da divisibilidade por 2 e por 3, de sorte que « *quando a somma dos algarismos de um numero qualquer fôr divisivel por 6, elle será tambem ; no caso contrario, o resto obtido será o de sua divisão por 6*».

Assim, por exemplo, 21225 é divisivel por 6.

Divisibilidade por 11. Dividindo por sete e um as potencias successivas da base, obtem-se periodicamente os restos 1 e 10. De sorte que, raciocinando como fizemos em caso analogo da base decimal, concluimos que « *um numero é divisivel por 11 quando a somma dos algarismos de ordem impar, a contar da direita, menos a somma dos algarismos de ordem par, fôr 0, 11 ou um multiplo de 11; no caso contrario, o resto obtido será igual ao da sua divisão por 11*».

O caracter de divisibilidade por 4 póde ser deduzido como consequencia deste, por isso que todo o numero divisivel por 11 é tambem por 4 ; embora a reciproca não seja verdadeira.

Assim, por exemplo, o numero 60606060 é divisivel por 11 e por 4 ; mas, 60504050 é divisivel por 4 e não é por 11.

Emfim, para concluir a doutrina da divisibilidade, notemos que os divisores que são iguaes á base menos um ou á base mais um, qualquer que seja esta, gozam de propriedades analogas ás que citamos para os divisores 9 e 11, em relação á base decimal, e 6 e 11 relativamente á septimal.

Dos divisores menores do que uma base qualquer, o que precede immediatamente na escala, é, ao mesmo tempo, o que deixa menor resto em relação a ella, e o que permitte obter mais facilmente o resto da divisão de um numero qualquer por um simples calculo mental.

Essa circumstancia levou a arithmetica decimal a empregar o divisor 9, para verificar as avaliações fundamentaes sobre os numeros inteiros.

252. — EMPREGO DOS DIVISORES NA PROVA DAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAES. — I — Prova da addicção. Similhante verificação é baseada na seguinte propriedade : « *O resto da divisão de uma somma por um numero é igual á somma dos restos das divisões das parcellas da somma pelo mesmo numero* ; *ou, então, a este resultado diminuido dos multiplos do divisor que por ventura contiver*. »

Com effeito, a somma resultando da addicção das parcellas, e estas contendo o divisor o mesmo numero de vezes que aquella, os restos serão necessariamente iguaes, como differenças entre quantidades iguaes.

Supponhamos, por exemplo, que se tenha obtido a somma dos numeros 605, 352 e 534. Determinando os restos de suas divisões por 9 (245—III), tem-se :

605	igual	a	um	multiplo	de	9	mais	2 ;
352	»	»	»	»	»	»	»	1 ;
534	»	»	»	»	»	»	»	3 ;
1491	»	»	»	»	»	»	»	6 ;

onde se vê que o resto da divisão por 9 é o mesmo para as parcellas e para a somma, e que só poderia ser diverso si a operação estivesse errada. Em vez de dividir por 9 a somma dos valores absolutos dos algarismos das parcellas e do resultado, torna-se mais facil desprezar os noves á medida que se addiccionam mentalmente taes algarismos.

Dahi a seguinte regra para tirar a prova dos noves da addicção : « *tiram-se os noves das parcellas como si formassem um só numero, tiram-se os noves da somma* ; *e si os dois restos forem iguaes, é provavel estar certa a operação* ».

Ha probabilidade e não certeza ; porque póde ter havido engano na operação da prova.

Além disso, esta não accusará erro, quando sommarmos, de mais ou de menos, 9 unidades ou um multiplo de 9. Vimos com effeito, que o resto de uma divisão não se altera, quando augmentamos ou diminuimos o dividendo de um multiplo do divisor. (242—4°).

Póde-se tirar esta prova empregando outro qualquer divisor, seja qual fôr a base numeral adoptada. Proponhamo-nos, por exemplo, tirar a prova dos seis, suppondo a addicção feita no systema septimal.

$$\begin{array}{r} 605 \\ 352 \\ \underline{534} \\ 2124 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Em vez de dizermos 6 e 5, 11, menos nove 2, e 3 são 5, e 5, 10, menos nove 1 ;.... diriamos 6 e 5 são *sete-e-quatro,* menos seis são 5, e 3 são *sete-e-um,* menos 6 são 2, e assim por diante. Os dois restos serão iguaes a 3 e deve-se escrevel-os ao lado, separados por um pequeno traço, como se faz no systema decimal.

II — *Prova da subtracção.* O minuendo sendo uma somma, cujas parcellas são o subtrahendo e o resto, conclue-se que a prova dos noves da subtracção deve-se fazer — «*Tirando os noves ao subtrahendo e ao resto conjunctamente, e depois ao minuendo; si os dois resultados forem iguaes, tem-se probabilidade de que a operação esteja certa.*»

Supponhamos, por exemplo, que se tenha subtrahido 3241 de 4560.

Tirando os noves ao subtrahendo e ao resto, encontra-se 6 ; e como acha-se o mesmo resultado no minuendo, conclue-se ser provavel a certeza da operação. Fazendo esta no systema septimal, obter-se-hia 1316 :

$$\begin{array}{r} 4560 \\ \underline{3241} \\ 1316 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Tirando a prova dos seis, achar-se-hia 3 para os dois restos.

III — *Prova da multiplicação*. Esta verificação baseia-se na propriedade seguinte : « *O resto da divisão de um producto de dois factores por um numero é igual ao resto do producto dos restos de cada um dos factores, dividido pelo mesmo divisor*.»

Com effeito, dividindo os factores pelo divisor, cada um delles torna-se um multiplo deste, augmentado do resto correspondente. De sorte que o producto será um multiplo do mesmo divisor, augmentado do producto dos restos.

O resto da divisão daquelle producto será, pois, igual ao resto da divisão deste ultimo. (243—4ª). Supponhamos, por exemplo, se tenha multiplicado 753 por 286, e procuremos apreciar as variações do producto, quando os seus factores forem divididos por 9. Veremos que

753	é igual	a	um	multiplo	de	9	mais	6
286	»	»	»	»	»	»	»	7.

Si tivessemos de multiplicar sómente o multiplicando pelo multiplo de 9 do multiplicador, obteriamos para este producto parcial um numero multiplo de 9 (porque o producto de qualquer quantidade por um multiplo de 9 é ainda um multiplo deste numero).

Como, porém, o multiplicador vem addiccionado a 7, aquelle producto virá augmentado de 7 vezes o multiplicando (18 c); isto é, de 7 vezes um multiplo de 9, mais 7 vezes 6.

O producto total será, pois, igual a um multiplo de 9 (resultante de dois outros multiplos do mesmo numero), mais 6 vezes 7. Vê-se, assim, que o producto obtido compõe-se de duas partes : uma divisivel por 9 e a outra formada pela multiplicação dos restos das divisões dos seus

factores por 9. Portanto, o resto da divisão do producto considerado por 9 será igual áquelle que se obtiver dividindo o producto dos restos de seus factores pelo mesmo divisor.

O resto do producto 215358 é, com effeito, 6, porque 25358 é equivalente a um multiplo de 9 mais 24.

753	
286	
4518	6 | 6
6024	7 | 6
1506	
215358	

Como o raciocinio que acabamos de fazer é independente do valor dos numeros empregados, podemos construir a seguinte regra para tirar a prova dos noves da multiplicação :

Tiram-se os noves ao multiplicando e ao multiplicador; multiplicam-se os dois restos, e tiram-se os noves ao producto delles. Tiram-se, finalmente, os noves ao producto total e si o resto obtido fôr igual ao precedente, é provavel não ter havido erro.

E' claro que si o producto envolver erro equivalente um multiplo de 9, a prova não o accusará; porque o producto exacto, ou com um multiplo de 9 a mais ou a menos, dará sempre o mesmo resto, quando dividido por 9.

A prova da multiplicação, por meio de qualquer outro divisor, é feita de modo analogo, seja qual fôr a base numeral adoptada. Suppondo esta septimal, tiramos no exemplo seguinte a prova dos seis.

1203	
4501	
1203	6 | 6
6321	4 | 6
5115	
6051303	

IV. *Prova da divisão.* O dividendo sendo uma somma de duas parcellas, producto do divisor pelo quociente e resto da operação, si houver, infere-se que se póde verificar a divisão applicando o que ficou estabelecido para a addicção e multiplicação.

Seja, por exemplo, 101633 a dividir por 232.

$$\begin{array}{r|l} 101633 & 232 \\ \cline{2-2} 883 & 438 \\ 1873 & \\ 17 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 7 & 5 \\ \hline 6 & 5 \end{array}$$

Com effeito, o dividendo sendo igual á somma do producto de 232 por 438 com o resto 17, segue-se que o resto da divisão daquelle numero por 9 deve ser igual á somma dos restos das divisões de suas parcellas por este numero. (I).

Ora, para obtermos o resto da divisão da 1ª parcella, que é um producto dos dois factores 232 e 438, vimos que é preciso dividir por 9 cada um desses dois factores, multiplicar entre si os restos obtidos 7 e 6, e dividir por 9 o seu producto 42, o que produz 6. (III).

O resto da 2ª parcella, 17, é 8. A somma dos dois restos é pois 14, e o resto da divisão desta somma por 9 será, portanto, 5. (I). Por conseguinte, este resto deverá ser igual ao fornecido pelo dividendo, si não houve erro na operação.

Podemos, pois, construir a seguinte regra para tirar a prova dos noves de uma divisão : « *Tiram-se os noves ao divisor e tambem ao quociente ; multiplicam-se os dois restos, e tiram-se os noves ao producto. Junta-se ao resultado o resto da divisão, si houver , e tiram-se os noves á somma obtida. Finalmente tiram-se os noves ao dividendo, e si o resto achado fôr igual ao precedente, provavelmente a operação estará certa.*»

E' obvio que, si o quociente envolver um erro de 9 ou de qualquer multiplo de 9, a prova não o accusará.

De modo analogo faz-se a prova da operação por 11 ou por qualquer outro divisor, seja qual fôr a base adoptada.

No exemplo seguinte tiramos a prova dos seis no systema septimal :

345623	2130
13262	145
14123	
0113	

6	5
4	5

CAPITULO VIII

Apreciação das reacções do calculo theocratico sobre as concepções numericas

(*Instituição das fracções ordinarias*)

§ κβ' (22)

Concepção das fracções ordinarias

253. — MOTIVOS QUE LEVAM A COMPLETAR A THEORIA DA DIVISÃO, DE MODO QUE A SOLUÇÃO ABSTRACTA CORRESPONDA Á CONCEPÇÃO CONCRETA DOS PROBLEMAS.—Estudando a theoria da divisão, vimos que a *solução abstracta* dos problemas que a determinaram nos conduzia, na generalidade dos casos, a exprimir o resultado por dois numeros, a saber: o *quociente* e o *resto*. Similhante resultado, directamente considerado, nos mostrou então que o problema é impossivel nos termos em que foi proposto.

Mas, comparando tal resultado com os problemas concretos que motivaram o calculo donde elle proveio, reconhece-se que a impossibilidade não provém da natureza das questões e sim da imperfeição da theoria.

Desde então a Humanidade foi levada a desenvolver a instituição da divisão, de modo a estabelecer a mais completa harmonia que lhe era possivel entre o *abstracto* e o *concreto*, entre a *razão theorica* e a *razão pratica*. Tal foi a origem das concepções fraccionarias, cuja apreciação vamos encetar.

---

(22) Numero *eikôssi kai duo* (vinte e dois).

Antes, porém, de abordar directamente o assumpto, devemos observar que, para pôr a instituição abstracta da divisão ao nivel das inspirações concretas, a Humanidade limitou-se a desenvolver a theoria anterior. (O progresso é o desenvolvimento da ordem).

Notemos ainda que a harmonia entre o concreto e o abstracto não se póde tornar *geral* sem ficar *idéal*, isto é, sem *relativar-se*. Ambas essas ponderações vão ficar patentes, á vista do exame que vamos iniciar.

Para reconhecer a insufficiencia da theoria primitiva da divisão, convém examinal-a successivamente em relação aos tres problemas que a determinaram. Neste exame seguiremos a ordem já directamente reconhecida como preferivel.

1.° *Dada a area de um rectangulo e um dos lados achar o outro lado.* Abstractamente considerado, este problema reduz-se, como vimos, a determinar um dos factores de um producto conhecido, quando se conhece tambem o outro factor.

Ora, na generalidade dos casos, a theoria da divisão nos conduz a um *quociente* e um *resto*; o que equivale a dizer que não é possivel determinar o lado desconhecido exactamente. Entretanto, o exame directo do problema concreto patenteia logo que elle é susceptivel de uma solução precisa. Isto é, dada uma certa recta, existe sempre uma outra que fórma com a primitiva um rectangulo cuja area seja igual a um conjuncto de quadrados.

A solução geometrica do problema não deixa a este respeito a minima duvida, como veremos na geometria preliminar.

Portanto a impossibilidade existe apenas no calculo, e ella significa que o lado incognito não póde ser representado pelo módulo linear adoptado. Mas, o módulo é arbitrario; concebe-se, pois, que mudando-o, o calculo se

torna exequivel, isto é, o lado desconhecido seja susceptivel de representação numerica.

Antes, porém, de indicar a solução da difficuldade, vejamos os outros dois problemas.

2.° *Achar a relação entre duas grandezas.* O nosso calculo foi instituido suppondo que as grandezas estavam avaliadas, e então o problema abstracto consistiu em vêr quantas vezes um numero se contém no outro.

Ora, o problema concreto póde apresentar-se ou entre as pluralidades ou entre as grandezas continuas.

Exemplo de pluralidade: quantos batalhões podemos formar com um certo numero de soldados?

Exemplo de grandezas continuas: qual a relação entre duas linhas cujas medidas se conhecem?

No primeiro exemplo, a existencia do resto indica realmente a impossibilidade de utilisar todos os soldados para formação dos batalhões, suppondo que não se queira que estes sejam compostos sinão com o numero de soldados préviamente fixado.

Mas, no segundo exemplo, isto é, quando se trata das grandezas continuas, o exame do problema concreto mostra que a impossibilidade do quociente exacto não indica a impossibilidade de referir precisamente o conhecimento de uma grandeza ao de outra.

Com effeito, a comparação geometrica de duas grandezas demonstra que o resto póde tambem ser expresso por meio do divisor. Basta para isso comparal-o com uma parte do divisor, convenientemente escolhida.

Mas, esta apreciação assignala tambem a necessidade de tornar mais abstracta a comparação das grandezas, referindo indifferentemente o conhecimento da maior ao da menor, ou reciprocamente.

Dahi se deprehende, em summa, que a presença do resto evidencia nesses casos a necessidade de modificar a

solução abstracta, aperfeiçoando mesmo a concepção da divisão.

Passemos ao terceiro problema.

3.° Dividir uma grandeza em um certo numero de partes iguaes.

O problema concreto póde ser posto tratando-se de pluralidades ou de grandezas continuas.

No primeiro caso convém distinguir a hypothese em que os elementos da pluralidade não podem satisfazer ao objectivo que se deseja, sem conservar a sua integridade, e a hypothese em que tal objectivo póde ser satisfeito, violada aquella condição. Exemplos:

a) Dividir um certo numero de prisioneiros por um certo numero de guerreiros.

b) Dividir um certo numero de fructos por um certo numero de pessoas.

c) Dividir uma recta em um numero qualquer de partes iguaes.

No primeiro exemplo o resto indica, de facto, a impossibilidade concreta de uma partilha igual.

Mas, nos outros dois exemplos, a impossibilidade do calculo não corresponde á impossibilidade do problema concreto.

Com effeito, os outros dois problemas são directamente concebiveis como comportando uma solução precisa.

Portanto, o exame do caso concreto indica a necessidade de aperfeiçoar a solução theorica.

Assim, em resumo, salvo o caso excepcional das pluralidades cujos elementos devem ser sempre considerados em sua integridade, o exame dos problemas concretos que levaram a instituir a divisão mostra a necessidade de completar o quociente; isto é, de tornal-o exacto, bem como de modificar a propria concepção da divisão. Isto posto, vejamos como se opéra tal modificação.

254.— O CASO DA DIVISÃO CONSIDERADA COMO O INVERSO DA MULTIPLICAÇÃO.—Si fôr dado um producto e um dos factores e tratar-se de determinar o outro, este póde ser considerado como sendo o multiplicando. Isto é, o dividendo representando a area do rectangulo, o divisor póde ser considerado como o numero de fileiras ou de columnas de quadrados modulares que se contém na superficie. O quociente será então o numero de quadrados contidos em uma fileira ou columna.

Para fixar as idéas tomemos um exemplo. Sabendo que a area de um rectangulo é de 33 metros quadrados e que um dos lados é de 5, quer-se determinar o outro lado.

Dizemos que o factor dado, 5, póde ser considerado como indicando o numero de fileiras ou de columnas de quadrados modulares; seja o numero de fileiras. O factor desconhecido, que nos dará o outro lado, representará então o numero de quadrados modulares de uma fileira.

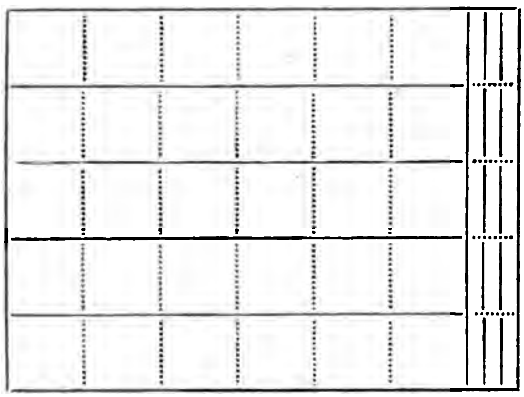
Ora, fazendo a divisão de 33 por 5 acharemos para quociente 6 e para resto 3. Isto nos mostra que o rectangulo é formado por 5 fileiras de 6 quadrados cada uma e mais um rectangulo complementar que vale 3 quadrados. Toda a difficuldade da questão concreta fica, pois, reduzida a repartir esses tres quadrados pela superficie do rectangulo complementar de que se trata.

Para effectuar similhante repartição reflicta-se que um lado desse rectangulo é representado por 5 módulos. Isto nos leva a imaginar cada um dos quadrados do resto dividido em 5 rectangulos iguaes, mediante o traçado de rectas parallelas a um dos lados pelos pontos de divisão do lado contiguo, dividido em 5 partes iguaes. Cada um desses fragmentos póde ser justaposto pelo seu maior lado a uma das 5 fileiras do quadrado dividendo.

Ora, o mesmo podemos fazer com os outros dois quadrados do resto. Isto feito, vê-se que a superficie do re-

ctangulo de 33 metros quadrados ficará constituida por 5 fileiras, contendo cada uma 6 quadrados modulares e mais 3 rectangulos iguaes.

Cada um desses rectangulos tem um lado igual ao módulo linear e o outro lado igual a uma parte desse módulo supposto dividido em 5 partes iguaes. Essa parte é o que se denomina um quinto do módulo. Os tres rectangulos de cada fileira acham-se justapostos pelos seus lados modulares, de sorte que o conjuncto delles fórma um rectangulo em que um dos lados é o módulo linear e o outro é igual a tres quintos desse módulo. E' esse lado que constitue o outro do rectangulo complementar, como mostra a figura seguinte :



Vê-se assim, em resumo, que o rectangulo de 33 metros quadrados que tem um lado de 5 metros, terá para o outro uma recta de 6 metros mais tres quintos do metro. Tres quintos é o que se chama uma *fracção* ; *é, pois, a representação numerica de uma grandeza menor do que o módulo*.

Essa representação é feita por meio de dois numeros, um dos quaes indica em quantas partes se divide o módulo e

chama-se *denominador*, e o outro indica quantas destas partes compõem a grandeza e chama-se *numerador*. (22 a).

A razão desses qualificativos resulta do papel que cada um dos *termos* da fracção representa no assignalamento da grandeza.

Com effeito, o *denominador* caracterisa o novo *módulo*, dando-lhe um *nome* que mostra a sua filiação para com o módulo primitivo.

E o numerador, como qualquer *numero*, define por meio desse novo módulo a grandeza de que se trata.

Voltando á divisão, vê-se que o emprego das fracções permitte exprimir o quociente exactamente. Basta para isto juntar ao quociente achado uma fracção em que o numerador é o resto e o denominador é o divisor.

Reflectindo, porém, sobre a concepção das fracções, seremos levados a reconhecer que todo quociente póde ser representado por uma fracção, porque essa concepção conduz a considerar cada numero sob um novo aspecto. Com effeito, na primitiva applicação dos numeros para representar as grandezas continuas, a grandeza tomada para termo de comparação foi naturalmente escolhida menor do que a grandeza que se queria medir. A origem subjectiva dos numeros assim o determinou, pois que foi da representação das pluralidades que os numeros passaram para a medida das grandezas continuas.

Mas, desde que a divisão conduziu a empregar os numeros para representar, por meio do módulo, grandezas menores do que elle, cada numero passou a ser encarado sob um duplo aspecto quando se o aprecia em relação ás grandezas continuas. Assim, *sete*, por exemplo, segundo o seu uso primitivo nas medidas, servia para referir o conhecimento de uma grandeza ao de outra menor do que ella e de

(22 a) Denominador, do latim *denominade* ; numerador, do latim *numerator*.

cuja repetição ella resultava. Mas, dada a concepção fraccionaria, *sete* serve tambem para referir o conhecimento de uma grandeza ao de outra maior do que ella e que a contém um certo numero de vezes.

A noção abstracta é a mesma em ambos os casos, porque corresponde á mesma pluralidade. Mas, a noção concreta varia: porque, em um caso, a pluralidade serve para caracterisar o todo por meio de partes, e no outro serve para definir as partes por meio do todo.

Dahi resulta a necessidade de modificar a nomenclatura numeral, fazendo que a expressão de cada numero assignale o fim a que elle é destinado. Nos primeiros gráos da fragmentação, as denominações fôram mais ou menos particulares: *meio, terço, quarto, quinto, sexto, setimo, oitavo, nono e decimo.*

Mas á medida que a noção fraccionaria se extendeu, a linguagem se tornou uniforme. Para designar o módulo por meio da pluralidade juntou-se á desinencia o affixo *avos*.

Por exemplo, *vinte sete* representa a pluralidade por meio da unidade e *vinte sete avos* representa a unidade por meio da pluralidade.

Pelo que precede vê-se que no enunciado de uma fracção menciona-se primeiro o *numerador* e depois o *denominador*, em virtude da mesma tendencia que levou no enunciado de qualquer medida a mencionar primeiro o *numero* e depois o *módulo*. Quando o denominador é expresso pela 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, etc. potencias da base numeral, dá-se-lhe a denominação de decimo, centesimo, millesimo, decimo millesimo, centesimo millesimo, millionesimo, etc.; o que dispensa o emprego do affixo *avos*.

Quanto á notação das fracções, variou nas diversas phases da evolução humana. Sem fallar da notação mediante os signaes graphicos da linguagem commum, devemos assignalar especialmente a notação grega. Segundo

ella, o denominador era collocado á direita do numerador e um pouco acima, conforme o modo vulgar de assignalar a numeração ordinal por meio da cardinal.

Na notação moderna o numerador é escripto acima do denominador separado por um traço horisontal e ás vezes por um inclinado, como por exemplo, em $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{2}$ e 1/10.

Vejamos agora como é possivel exprimir a totalidade do quociente por uma fracção. No exemplo acima, o quociente era representado por 6 mais $\frac{3}{5}$. Porém, 6 póde ser expresso por uma fracção tendo para denominador qualquer numero. Para reconhecel-o note-se que a unidade caracterisa sempre a existencia synthetica, quer se trate de um todo indivisivel, quer se considere o conjuncto dos elementos que compõem um ser complexo.

No primeiro caso o seu symbolo numerico equivale ao do primeiro termo da escala arithmetica.

No segundo caso o seu symbolo resulta da combinação de dois numeros iguaes quaesquer, um indicando de quantos elementos se compõe o todo e o outro mostrando que se considera o conjuncto desses elementos. Isto é, *a unidade é representada por uma fracção em que o numerador é igual ao denominador*.

Isto posto, qualquer numero inteiro equivalendo a uma somma de unidades, equivale a uma somma de outras tantas fracções iguaes á unidade. Assim a unidade sendo igual a $\frac{5}{5}$, o numero 6 equivale a 6 vezes $\frac{5}{5}$, isto é, equivale a uma fracção tendo para denominador 5 e para numerador o producto desse numerador, 5, pelo numero 6.

A parte inteira do quociente corresponde, portanto, a uma fracção em que o denominador é o divisor e o numerador é o seu producto pelo mesmo divisor.

Conclue-se dahi que as duas partes do quociente são expressas por fracções que têm o mesmo denominador, isto é, são numeros referidos ao mesmo módulo.

A reunião dessas duas partes dará, pois, o numero dos mesmos módulos que a somma dos numeradores. Ora, essa somma reproduz o dividendo, pois que é igual ao producto da parte inteira do quociente pelo divisor mais o resto.

No exemplo mencionado, 6 mais $\frac{3}{5}$ equivale a $\frac{6 \text{ vezes } 5}{5}$ mais $\frac{3}{5}$, ou $\frac{30}{5}$ mais $\frac{3}{5}$ ou $\frac{33}{5}$.

Assim, *o quociente é representado por uma fracção em que o numerador é o dividendo, e o denominador é o divisor.*

255. — REFLEXÕES SOBRE O CASO DA DIVISÃO CONSIDERADA COMO TENDO POR OBJECTO DETERMINAR A RELAÇÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS. — Si considerarmos o segundo dos problemas que determinaram a divisão, chegaremos a conclusões identicas.

Supponhamos que se trata de achar a relação entre uma linha de 33 metros e outra de 5. Effectuada a divisão, obtem-se 6 para quociente e 3 para resto: isto significa que a maior das linhas contém 6 vezes a menor e sobra um resto de 3 módulos. Ora, esse resto não póde ser expresso pelo divisor, mas póde ser representado por uma parte do divisor.

Com effeito, o divisor sendo 5 módulos, cada módulo é igual á quinta parte do divisor ou um quinto do divisor. E como o resto contém 3 módulos, segue-se que o resto conterá $\frac{3}{5}$ do divisor.

Portanto o dividendo se apresenta como constando de duas partes, a saber : uma igual a 6 vezes o divisor, e outra igual a $\frac{3}{5}$ do mesmo divisor. O quociente será, pois, 6 mais $\frac{3}{5}$.

Isto mostra que tambem neste caso o quociente se completa por meio de uma fracção, em que o numerador é o resto e o denominador é o divisor.

Um raciocinio analogo mostra tambem que a totalidade do quociente póde ser expressa por uma fracção.

Porque a parte inteira do quociente indicando o numero de vezes que o divisor se contém no dividendo, póde ser representada por uma fracção, tendo para denominador o divisor.

Com effeito, o divisor póde ser considerado como $\frac{5}{5}$ de si mesmo; portanto, 6 vezes o divisor equivale a 6 vezes $\frac{5}{5}$ do divisor, ou $\frac{30}{5}$ do divisor. De sorte que o quociente completo será a somma de $\frac{30}{5}$ do divisor com $\frac{3}{5}$ do mesmo divisor, o que dá $\frac{33}{5}$ do divisor.

O quociente é, pois, ainda expresso por uma fracção, em que o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor. O quociente, em vez de exprimir, portanto, quantas vezes o divisor se contém no dividendo, *exprime quantas partes do divisor se conteem no dividendo*.

Collocando-nos neste ponto de vista, isto é, considerando *á divisão como tendo por objecto achar quantas partes de uma grandeza se conteem em outra*, de modo a definir uma pela outra, sem nos preoccuparmos com a avaliação dellas, chega-se immediatamente a similhante resultado, quer arithmeticamente, quer geometricamente.

Antes, porém, de mostral-o, convém levarmos em conta as circumstancias que conduziram a tal ponto de vista. O problema de referir o conhecimento de uma grandeza ao de outra não presuppõe em si mesmo o modo pelo qual a ligação entre ambas vai se estabelecer.

A hypothese mais simples consiste, sem duvida, em suppôr que a maior contém a menor um certo numero de vezes. Mas essa hypothese é extremamente rara.

Basta considerar as linhas como representadas pelos termos successivos da escala numerica, para perceber-se logo que a referencia de uma linha a outra torna-se impossivel, desde que ellas não correspondam a termos que se acham sufficientemente afastados. Desde então seremos leva-

dos a reconhecer que o meio mais simples de dependencia consiste em exprimir as grandezas, umas por meio das partes das outras. Assim o problema se offerece á primeira vista como sendo sempre possivel, qualquer que seja o tamanho relativo das grandezas comparadas, quaesquer que sejam os numeros que as definem. Porque se imaginava que, tomando uma parte sufficientemente pequena de uma das grandezas, se encontrava o módulo adequado á medida da outra.

Assim considerada, a divisão é susceptivel de ser concebida desde logo como identificando-se com a noção de fracção. Porque cada numero caracterisando um certo conjuncto de módulos, o módulo vem a ser, inversamente, uma parte aliquota de todos os numeros. De sorte que, dados dois numeros, um póde immediatamente ser expresso por meio do outro, baseando-se na aptidão que este tem para caracterisar o módulo.

Por exemplo, dados dois numeros 11 e 16, póde-se estabelecer a relação entre ambos pelo seguinte raciocinio: o módulo é $\frac{1}{16}$ do mesmo numero 16; portanto 11 módulos são $\frac{11}{16}$ de 16.

A divisão caracterisa deste modo uma combinação independente de qualquer avaliação. De sorte que ella póde ser concebida independente da multiplicação, que poderia mesmo ser instituida como operação inversa, si a filiação para com a addicção não fosse ordinariamente preferivel.

A definição da multiplicação neste caso seria a seguinte: *Dados dois numeros, determinar um terceiro cuja relação, com um delles fosse igual ao outro.*

Si considerassemos duas grandezas não avaliadas e procurassemos exprimir uma por meio da outra, chegariamos ao mesmo resultado. Assim, supponhamos que se trata de referir uma linha recta a outra, isto é, achar a *razão* ou *relação* entre as duas. A primeira idéa seria applicar a menor sobre a maior e vêr si se continha nella exactamente.

Si não si contivesse, tentar-se-hia dividir uma das duas em um certo numero de partes iguaes, e ensaiar si uma dessas partes se continha exactamente na outra. Mas a prolixidade de tal processo inspirou bem depressa outro.

Depois de ter applicado a menor recta sobre a maior, admitta-se que sobra um resto. E' claro que, si esse resto se contiver na menor, será um módulo commum ás duas. Esta observação conduz, portanto, a ensaiar a medida da menor das rectas pelo resto que se obteve medindo a maior pela menor.

No caso deste ensaio dar um segundo resto, a mesma reflexão leva a reconhecer que, si este segundo resto couber exactamente no primeiro, será uma medida commum ás duas rectas dadas.

Vê-se, por ahi, que deve chegar-se assim a um módulo commum, e mesmo que este módulo será o maior dos módulos possiveis

Mas, o resto que fôr módulo commum, sendo uma parte de ambas as grandezas, a relação entre as duas será expressa pelas partes de uma que se contém na outra.

Imaginemos que se chega a um resto que cabe 11 vezes em uma das grandezas e 16 na outra. Esse resto será $\frac{1}{16}$ da maior grandeza e, portanto, a menor em relação a ella será expressa pela fracção $\frac{11}{16}$.

Assim, a concepção da *razão geometrica* coincide com a do *quociente*.

A divisão constitue, assim, o primeiro germen distincto da algebra, isto é, do calculo em que se considera as relações numericas abstrahindo das avaliações a que ellas podem dar lugar.

« Depois da fusão das noções de *quociente* e de *razão geometrica*, esta expressão tem a vantagem historica e dogmatica de lembrar a dupla origem da algebra. »

A *razão* de duas linhas é tão abstracta como a de dois numeros, pois que a mesma definição lhe convém, e ella não comporta sentido concreto. Sobre esse aspecto, a geometria suscitando a noção que a arithmetica designou pela palavra *quociente*, impelliu mais para a algebra do que suggerindo a idéa de *producto*, que tinha ordinariamente um caracter concreto, como a linguagem o attestou por muito tempo.

« Mal apreciada antes dessa fusão, a idéa de fracção acha-se incorporada ao conjuncto do dominio logico. » Quando se comparam as grandezas concretas, para procurar o módulo commum, a pratica ou permitte achar esse módulo ou nos faz reconhecer que elle é extremamente pequeno.

Mas, o estudo das leis geometricas conduz a descobrir que ha casos em que grandezas, definidas precisamente umas pelas outras, não têm modulo commum. Assim, dado o lado de um quadrado, o quadrado está determinado e todas as linhas nelle traçadas. Entretanto demonstra-se que não ha medida commum entre o lado e a diagonal do quadrado.

O mesmo se dá com a circumferencia e o raio do circulo. Neste caso, as grandezas se dizem *incommensuraveis* e umas não podem ser consideradas como formadas de partes de outras.

O contrario se dá com as grandezas *commensuraveis*. Este caso acha-se espontaneamente realisado pelos numeros, que todos já são grandezas expressas com um módulo commum.

« Fundada em tal apreciação, a noção de *quociente* ou *fracção* é tão directa como as de *somma*, *differença* e *producto*, o que faz melhor sobresahir a independencia mutua das diversas relações elementares. »

256. — A DIVISÃO CONSIDERADA COMO PROVENIENTE DO PROBLEMA DA EQUIREPARTIÇÃO. — Si se tratar de dividir um numero em partes iguaes, quando elle designar uma gran-

deza continua ou uma pluralidade cujos elementos não precisam ser considerados em sua integridade, chega-se ás mesmas consequencias.

Com effeito, supponhamos que, dividindo 33 objectos por 5 pessoas, se chega ao quociente 6 e ao resto 3.

Cada um desses objectos póde ser dividido em 5 partes iguaes e a cada pessoa tocará uma dessas partes. Logo, cada pessoa terá 6 dos taes objectos e mais $\frac{3}{5}$.

Mas a parte inteira póde tomar a fórma fraccionaria si considerarmos que cada objecto é $\frac{5}{5}$ de si mesmo. Donde, 6 objectos tornar-se-hão 6 vezes $\frac{5}{5}$ ou $\frac{30}{5}$. O quociente será, pois, $\frac{30}{5}$ mais $\frac{3}{5}$ ou $\frac{33}{5}$.

Isto é, o quociente se completa por uma fracção, em que o numerador é o resto e o denominador é o divisor, ou o *quociente total é expresso por uma fracção que tem para numeradór o dividendo e para denominador o divisor*.

Póde-se chegar immediatamente a este resultado reflectindo que, em vez de fazer a divisão dando um objecto a cada pessoa, póde-se partir cada um dos objectos em 5 partes e dar uma parte a cada pessoa. Cada pessoa terá desde então tantos quintos quantos forem os objectos, isto é, no nosso exemplo $\frac{33}{5}$.

260. — DA NECESSIDADE THEORICA DE FAZER PREVALECER A CONCEPÇÃO DA DIVISÃO COMO TENDO POR FIM DETERMINAR A RELAÇÃO GEOMETRICA ENTRE DOIS NUMEROS. — Acabamos de vêr que, qualquer que seja o ponto de partida da divisão, reconhece-se que ella conduz á noção de *fracção* e com esta se identifica, já para completar o quociente por meio do resto, já sobretudo para formar do quociente uma idéa que se applique a todos os casos.

Mas, esse exame mesmo demonstra que a noção de divisão deve ser habitualmente tida como *uma combinação*

na qual se procura conceber quantas partes de uma grandeza se contém em outra.

De sorte que o quociente, abstractamente considerado, deve ser sempre identificado com a idéa de *razão* ou *relação* geometrica.

A necessidade de fazer prevalecer esta significação resulta de ser a que melhor permitte sentir a combinação do ponto de vista geometrico com o ponto de vista arithmetico, para fazer surgir a algebra.

Com effeito, é assim que a origem geometrica adquire mais facilmente o caracter abstracto, não comportando mesmo, então, sentido concreto, o que não se dá no caso da divisão como o inverso da multiplicação, nem no caso de equidivisão das grandezas.

Por outro lado, sem identificar a noção de divisão com a de *fracção*, não se póde conceber a operação relativamente a dois numeros ou duas grandezas quaesquer, nem formar do quociente uma noção uniforme.

Essa identificação conduz, não só a conceber uniformemente o quociente quando o dividendo é maior que o divisor, mas implicitamente faz desapparecer toda noção de grandeza relativa dos dois termos da divisão, que, segundo a origem geometrica, denominavam-se *antecedente* e *consequente*.

261. — IMPORTA EXTENDER A EXPRESSÃO FRACCIONARIA A TODOS OS NUMEROS. — O nosso exame mostra tambem a possibilidade de representar um numero qualquer sob fórma de fracção.

Desde então, devemos systematisar essa possibilidade, concebendo habitualmente os numeros inteiros como fracções em que o denominador póde ser qualquer.

Assim, por ex., póde-se representar 3 por uma fracção cujo denominador é 7. Basta para isso *multiplical-o e dividil-o simultaneamente pelo denominador* 7; porque a unidade contendo $\frac{7}{7}$, 3 unidades conterão 3 vezes $\frac{7}{7}$ ou $\frac{21}{7}$.

Ordinariamente, porém, considera-se todo o numero inteiro como uma fracção cujo denominador é a unidade que apenas se acha supprimida na notação commum.

Reciprocamente, uma apreciação philosophica das fracções nos leva a consideral-as como numeros inteiros cujas unidades são menores, distinguindo-se delles pela diversidade dessas unidades. Veremos, porém, que podem ser reduzidas á mesma unidade, isto é, a um mesmo denominador; de sorte que escolhido este póde-se comparal-as e dispol-as mesmo numa escala de grandeza, á similhança daquella dos numeros inteiros.

262. — APRECIAÇÃO DAS VARIAÇÕES DE UMA FRACÇÃO; INFLUENCIA DOS TERMOS; NOÇÃO DE LIMITE. — Uma fracção sendo caracterisada por dois numeros, resta examinar como a grandeza da fracção depende da dos seus elementos.

Ora, basta ter presente a significação de seus dois termos, para perceber a influencia do numerador e do denominador sobre a combinação que elles definem.

Com effeito, em primeiro lugar, vê-se que o *denominador conservando-se constante, a fracção será tanto maior quanto maior fôr o numerador.*

De sorte que si o numerador tornar-se 2, 3, 4, etc. vezes maior, a fracção tornar-se-ha 2, 3, 4.... vezes maior.

O inverso succederá si o numerador tornar-se 2, 3, 4.... vezes menor.

Ambas essas observações são evidentes, porque uma fracção é um numero no qual a unidade é parte do módulo habitual. De sorte que as proposições acima equivalem a dizer que a unidade conservando-se invariavel, o valor da grandeza cresce ou diminue na mesma proporção que o numero.

Si o numerador conservar-se invariavel e o denominador crescer ou diminuir, a grandeza da fracção diminuirá ou augmentará na mesma proporção; porque é evidente que o valor das grandezas é proporcional ao da unidade.

Com effeito, quando o denominador cresce, a unidade fraccionaria diminue proporcionalmente.

O inverso se dá quando o denominador diminue. De sorte que tornando-se o numerador 2, 3,.... vezes maior, a fracção tornar-se-ha 2, 3,.... vezes maior; e tornando-se o denominador 2, 3,.... vezes maior, a fracção tornar-se-ha 2, 3,.... vezes menor.

Conclue-se dahi que, *quando os dois termos de uma fracção augmentam ou diminuem simultaneamente e na mesma proporção, a fracção fica invariavel.*

Assim, por ex., a fracção $\frac{3}{5}$ não se altera quando multiplicamos ambos os seus termos por um mesmo numero inteiro, qualquer que elle seja.

Nestas condições, vê-se que um mesmo numero póde ser representado por uma infinidade de fracções.

Mas, si os accrescimos em vez de serem proporcionaes forem iguaes, isto é, si addiccionarmos o mesmo numero a ambos os termos da fracção, esta augmenta ou diminue conforme o numerador é maior ou menor que o denominador, isto é, conforme fôr *propria* ou *impropria*.

O inverso terá lugar se subtrahirmos um mesmo numero de ambos os seus termos.

Para evidencial-o consideremos, por ex., a fracção $\frac{3}{5}$ e juntemos successivamente 2 a ambos os termos; teremos as fracções $\frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11}, \frac{11}{13}, \frac{13}{15}...$

Ora, a differença entre o numerador e o denominador destas novas fracções é 2, assim como na primeira.

De sorte que, quando se junta a ambos os termos de uma fracção o mesmo numero, a differença entre o numerador e o denominador não se altera. Isto posto reflicta-se que uma grandeza qualquer é representada por uma fracção em que o numerador é igual ao denominador.

Donde resulta que *uma fracção caracterisa uma grandeza da qual se desprezaram tantas partes quantas são as*

indicadas pela differença entre o numerador e o denominador, si a fracção é propria ; ou então *a fracção caracterisa uma grandeza mais tantas partes quantas são os indicadas pela referida differença, si a fracção é impropria*: Tal é o modo mais philosophico de apreciar a noção de fracção.

Assim, no nosso exemplo, $\frac{3}{5}$ caracterisam uma grandeza da qual se desprenderam $\frac{2}{5}$ partes; $\frac{5}{3}$ caracterisam, ao contrario, uma grandeza á qual se juntaram $\frac{2}{3}$ partes.

Portanto, quando se junta a ambos os termos de uma fracção o mesmo numero, si a differença entre o numerador e o denominador conservar-se constante, conclue-se que o numero de partes desprezadas ou accrescentadas é sempre o mesmo. Mas, como as partes vão diminuindo á medida que o denominador augmenta, segue-se que a fracção cada vez differe menos da grandeza total.

Assim, no nosso exemplo, $\frac{3}{5}$ representa uma grandeza da qual se desprezaram $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{7}$ representa uma grandeza da qual se desprezaram $\frac{2}{7}$ e como $\frac{2}{7}$ é menor que $\frac{2}{5}$, desprezou-se de menos; a fracção augmenta portanto.

Continuando a juntar o mesmo numero a ambos os termos, vai-se desprezando cada vez menos; logo, *a fracção tende a ser igual á grandeza, quando as partes desprezadas forem insignificantes*.

Si a fracção fôr impropria, $\frac{5}{3}$ por exemplo, e juntarmos successivamente o mesmo numero, 2, a ambos os termos, obteremos $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{13}{11}$ ... onde as partes augmentadas vão diminuindo cada vez mais; logo *a fracção tende a ser igual á grandeza, quando as partes augmentadas forem insignificantes*.

Uma grandeza qualquer podendo ser tomada para unidade, póde-se enunciar este theorema dizendo que *uma fracção cujos termos crescem igualmente tende sempre para*

a unidade, da qual poderá se approximar tanto quanto se quizer, mas sem poder jámais áttingil-a.

Tal é a origem mais clara e mais directa que o calculo póde fornecer da noção de *limite*, destinada a tornar-se fundamental em Geometria e mesmo em Mecanica.

Extendida convenientemente, ella convém ao conjuncto da Philosophia Segunda e deve finalmente coincidir em Moral com a noção universal de *typo*, immediatamente emanada da Philosophia Primeira. (22 b).

§ κ γ' (23)

Reducção das fracções á sua expressão mais simples. Duplo processo para effectual-a: Primeiro processo, baseado na decomposição em factores primos

263.— CONCEPÇÃO DA DOUTRINA DA SIMPLIFICAÇÃO.— Temos visto que uma fracção não muda de valor quando se multiplicam ou se dividem seus dois termos por um mesmo numero. Esta propriedade permitte dar ás fracções uma infinidade de fórmas diversas, embora todas equivalentes.

Por ex., todas as fracções

$$\frac{1}{2}\ \frac{3}{6}\ \frac{9}{18}\ \frac{27}{54}\ \frac{81}{162}\ \frac{243}{486}\ \frac{729}{1458}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

cujos denominadores contêm respectivamente 2 vezes o numerador, exprimem sob fórmas differentes $\frac{1}{2}$ ou a metade da unidade, porque todas ellas provêm desta fracção, mediante a multiplicação successiva de seus termos por 3, o que, conforme vimos, não altera o seu valor.

(22 b) Das notas do Curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.
(23) Numero *eikõssi kai tréis* (ou tria) — vinte e tres.

COMARCA

Do mesmo modo as fracções

$$\frac{1}{2}\ \frac{2}{4}\ \frac{6}{12}\ \frac{24}{48}\ \frac{120}{240}\ \frac{720}{1440}\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

são todas equivalentes a $\frac{1}{2}$ porque provêm desta fracção mediante a multiplicação successiva dos seus termos por 2, 3, 4, 5, etc. Mas, de todas estas fracções, é evidentemente $\frac{1}{2}$ aquella cuja grandeza melhor se aprecia.

Esta vantagem, junta á de calcular sobre numeros mais simples, faz sentir a utilidade de reduzir uma fracção aos seus menores termos, isto é, achar a fracção equivalente a uma fracção proposta, e cujos termos sejam os menores possiveis.

A fracção assim obtida cujos termos são mais simples que os termos correspondentes de toda fracção equivalente, chama-se *irreductivel*.

Similhante transformação é de um emprego muito frequente: porque toda a fracção sendo susceptivel de uma infinidade de expressões differentes, raras vezes offerece espontaneamente a fórma mais simples que comporta.

Do que dissemos acima conclue-se logo que, seja qual fôr o processo empregado para effectuar tal transformação, deve elle ser baseado na divisão, isto é, na operação inversa áquella que permitte dar ás fracções uma infinidade de expressões diversas, embora equivalentes. Isso é tanto mais racional, quanto é certo que uma fracção não muda de valor quando dividimos ambos os seus termos por um mesmo numero.

1.° Applicada ao caso mais favoravel, isto é, áquelle em que o numerador é um multiplo do denominador, a divisão reduz immediatamente a fracção a um numero inteiro equivalente.

Assim, por ex., si tivermos a fracção $\frac{165}{15}$, dividindo ambos os seus termos pelo proprio denominador, obteremos immediatamente 11.

2.° O caso mais proximo do precedente é aquelle em que o numerador é maior do que o denominador, sem ser entretanto seu multiplo.

Submettendo ao mesmo processo todas as fracções em que o dividendo é superior ao divisor, vê-se que ellas comportam uma simplificação analoga.

Obtem-se com effeito, pela divisão, um numero fraccionario, isto é, um numero inteiro acompanhado de uma outra fracção, onde o numerador é inferior ao denominador, e que cumpre ainda simplificar.

Assim, por ex., considerando a fracção $\frac{2960}{135}$, obteremos pela divisão 21 mais $\frac{125}{135}$.

3.° Resta-nos, portanto, vêr como se póde simplificar as fracções desta natureza ; isto é, aquellas em que o numerador é inferior ao denominador.

264.—OS DOIS PROCESSOS PARA REALISAR A SIMPLIFICAÇÃO.—Na impossibilidade de continuar a dividir o numerador pelo denominador, podemos contudo experimentar a divisão de ambos por 2, 3, 4, 5, 6, etc., e effectuar as operações que forem exactas.

Comprehende-se que assim procedendo iremos encontrando fracções equivalentes á proposta e cada vez mais simples do que ella ; salvo no caso em que o numerador e o denominador não forem divisiveis por nenhum numero inteiro ; porque então, a fracção proposta é a mais simples dentre todas aquellas que podem representar exactamente a grandeza por ella expressa.

Estão, por ex., neste caso

$$\frac{3}{7} \quad \frac{11}{21} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{17}{19} \quad \frac{11}{127} \text{ etc.}$$

cujos termos, não podendo ser divididos exactamente por nenhum numero inteiro, ou não tendo nenhum *divisor commum*, a não ser a unidade, são por isso chamados *primos entre si*, por analogia com os *numeros primos* : As fracções consideradas são então irreductiveis a quaesquer outras mais simples e equivalentes.

Supponhamos, porém, o caso em que ha divisores communs, como por ex. na fracção $\frac{462}{882}$.

Ensaiando a divisão por 2 acharemos a fracção equivalente $\frac{231}{441}$; tentando ainda a divisão por 2 verificamos não ser possivel, mas, fazendo-a por 3, encontramos a fracção mais simples $\frac{77}{147}$; ensaiando successivameute a divisão desta por 4, 5 e 6, verificamos não ser possivel; mas, dividindo ambos os termos por 7, encontramos a fracção $\frac{11}{21}$, cujos termos não comportam mais nenhum divisor commum, a não ser a unidade; $\frac{11}{21}$ é, pois, a expressão mais simples da fracção proposta.

Eis ahi o processo que espontaneamente occorre para simplificar uma fracção. Elle consiste, como se vê, em supprimir successivamente os factores communs a ambos os termos, mediante o emprego redobrado da divisão.

Todavia, similhante marcha offerece o inconveniente de exigir um grande numero de tentativas para conduzir áquella operação, e o espirito humano foi levado a systematisal-a com o fim de reduzir o mais possivel estas tentativas.

Para comprehender tal aperfeiçoamento, basta notar que, depois de haver ensaiado a divisão de ambos os termos da fracção pelos numeros primos 2, 3, 5, 7..., é escusado tentar dividil-os pelos seus productos, 2 vezes 2 ou 4, 2 vezes 3 ou 6, 2 vezes 4 ou 8, etc.

Em resumo, o processo systematico consiste *em decompor successivamente os termos da fracção em seus factores primos e supprimir aquelles que forem communs a ambos*

Mas, antes que a Arithmetica tivesse instituido similhante processo, já a Geometria havia inspirado um outro que consiste, como veremos, na *suppressão de um numero equivalente ao producto de todos aquelles factores ou divisores communs, o qual foi por isso chamado maior divisor commum*. (255)

265.— MODO DE DECOMPOR UM NUMERO EM FACTORES PRIMOS.— Para instituir o processo systematico baseado na decomposição do numerador e do denominador em seus factores primos, precisamos primeiramente estabelecer as propriedades numericas que tornam possivel similhante decomposição. O principio fundamental desta é simplesmente o seguinte :

Todo o numero que não é primo, é um producto de factores primos.

Com effeito, consideremos um numero qualquer decomposto em factores e supponhamos que dentre estes ha um ou mais que não são primos.

1.° E' a principio evidente que todo o numero não primo tem pelo menos um divisor primo.

Porque, não sendo primo, admitte pelo menos um divisor ou antes dois; porquanto o quociente póde ser considerado como tal. Si qualquer desses dois numeros não fôr primo, terá por sua vez um divisor, a respeito do qual podemos raciocinar do mesmo modo, e assim por diante.

Teremos, pois, uma série de divisores, cada um menor do que o precedente, de sorte que no caso menos favoravel achar-se-ha a unidade para valor do ultimo divisor. Mas, mesmo neste caso, o divisor precedente será um numero primo, como só admittindo por divisor a unidade. E como sabemos que o dividendo primitivo equivale ao producto dos divisores successivos pelo quociente final, é claro que o numero proposto encerrará, ao menos, por penultimo divisor um factor primo.

2.° Applicando este raciocinio a cada um dos factores não primos do numero proposto, é evidente que de proximo em proximo serão elles substituidos por numeros primos; o que não póde deixar de acontecer, porque os quocientes vão diminuindo successivamente. De modo que o mesmo numero ficará, finalmente, decomposto em um producto de factores primos.

Como a decomposição de um numero em seus factores primos deve necessariamente basear-se na divisão successiva delle por esses factores, é evidente que ella exige o conhecimento dos numeros primos.

Por mais esforços que se tenha feito para achar a lei de successão destes numeros, não se tem podido descobril-a. Mas si até o presente não foi encontrado meio algum de conhecer *á priori* os numeros primos, nem mesmo de se determinar um numero primo de um tamanho que se queira, conseguiu-se em compensação organisar tabellas onde elles são enumerados até os limites da escala numerica, exigidos pelas nossas necessidades. (23a).

Proponhamo-nos, pois, descobrir quaes são na série natural dos numeros, até um limite dado, 1000 por ex., aquelles que são *primos*.

O methodo mais expedito para resolver este problema é o seguinte, attribuido a Eratosthenes:

Este geometra grego (23b) observou que os numeros *pares*, á excepção de 2, não podendo ser primos, por serem

(23a) Entretanto muito esforço tem-se despendido inutilmente no estudo destes numeros. O theorema mais curioso e mais notavel pela sua generalidade nenhuma utilidade tem: Consiste em que «si um numero é primo, o producto de todos os numeros inferiores, augmentado de uma unidade, é um numero divisivel por elle».

(23b) Era bibliothecario da celebre escola de Alexandria e suppõe-se que nasceu em Cyrene no anno de 276 antes de nossa éra. Sua tabella de numeros primos era conhecida por *crivo de Eratosthenes*, porque elle costumava assignalar os numeros não primos crivando-os com um estilete na taboa em que estavam gravados.

decomponiveis em duas partes iguaes differentes da unidade, era inutil procurar estes entre aquelles.

Por isso excluiu a principio da série natural todos os numeros pares, á excepção de 2; para o que notou que bastava contar de dois em dois, a partir deste numero exclusivamente, e supprimir os que fossem encontrados até o limite determinado.

Salvo o numero 2, restava sómente a serie dos impares, a respeito da qual notou que si a partir de 3, exclusivamente, se contasse de tres em tres, todos os numeros assim encontrados seriam divisiveis por 3.

Com effeito, cada numero impar differindo do precedente de 2 unidades, differirá evidentemente de 2 vezes 3 ou 6 daquelle que o preceder de tres ordens: portanto, o numero que se achar tres ordens depois de um numero divisivel por 3, será elle proprio divisivel por 3.

Do mesmo modo o numero que se achar tres ordens depois de um outro não divisivel por 3, não o será tambem; porque elle se compõe então de uma parte que é divisivel por 3, e de outra que não o é. (243 — 4º).

Portanto, si a partir de 3, exclusive, contar-se de tres em tres, os numeros que se fôrem encontrando serão divisiveis por 3, e não haverá outros que gozem de tal propriedade.

Razão similhante conduziu Eratosthenes a excluir todos os numeros encontrados contando de cinco em cinco, a partir de 5 exclusivamente; de sete em sete a partir de 7; de onze em onze a partir de 11 e etc.; de sorte que na sua taboa não ficavam sinão os numeros primos.

Fizemos assim a seguinte tabella dos numeros primos, comprehendidos entre 1 e 1000.

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163

167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233
239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563
569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641
643	647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821
823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Para abreviar a construcção de similhante taboa, observemos que basta excluir os numeros a partir sómente do quadrado do numero primo cujos multiplos se quer supprimir; pois que todos os numeros que se acham antes deste quadrado são necessariamente primos. Assim, por ex., depois de haver supprimido todos os multiplos de 3, os numeros que precedem ao quadrado de 5, isto é, a 25, são primos, e por conseguinte o mais simples multiplo de 5 a supprimir na taboa é 25.

Desta observação resulta que *um numero é primo quando não é divisivel pelos numeros primos cujos quadrados são inferiores a elle*.

Nestas condições, vê-se que *para verificar si o numero é primo, basta dividil-o successivamente pelos numeros primos em sua ordem natural, até obter um quociente menor do que o divisor, sem que tenha deixado de haver resto em todas as divisões precedentes*.

266. — A MARCHA DA OPERAÇÃO. — Conhecendo até um certo limite da escala numerica quaes os numeros que são primos, torna-se facil decompôr um numero qualquer em seus factores primos.

Para melhor comprehender a marcha da operação, seja por ex., 32004 a decompôr em seus factores primos. Suppondo que este numero não é primo, já vimos que deve ser igual

a um producto de factores primos que se trata de determinar. Para isso notemos que terminando em 4, é divisivel por 2 (244—3°), e o quociente desta divisão é 16002.

O numero proposto fica, pois, equivalente ao producto de 2 por 16002 e a questão fica reduzida a decompôr este ultimo numero, que é ainda divisivel por 2. Effectuando novamente a divisão achamos 8001; de modo que 16002 equivale ao producto de 2 por 8001 e, portanto, 32004 torna-se igual ao producto de 2 por 2 por 8001.

Este ultimo quociente sendo impar, não é mais divisivel por 2; porém, sabemos que o é por 3.

Feita a divisão, achamos 2667; de sorte que 8001 é igual ao producto de 2 por 2667 e por conseguinte 32004 torna-se equivalente ao producto de 2 por 2 por 3 e por 2667. A questão fica, pois, reduzida a decompôr este ultimo numero em seus factores primos. Sendo elle divisivel por 3 effectuando novamente a divisão, acha-se para quociente 889; de modo que 2667 torna-se iguál ao producto de 3 por 889 e o numero proposto ao producto de 2 por 2 por 3 por 3 e por 889. A questão está agora reduzida a decompôr 889 em seus factores primos.

Ora, este numero não é mais divisivel por 3, não o sendo tambem por 5. (245—4°). Somos, pois, levados a ensaiar a divisão por 7, o que dá para quociente 127; de sorte que 889 torna-se igual ao producto de 7 por 127, e o numero proposto fica equivalendo ao producto de 2 por 2 por 3 por 3 por 7 e por 127.

Este ultimo numero, não sendo divisivel por 11, concluimos immediatamente que é primo; e isto de accôrdo com a observação acima, porque o quadrado de 11 é inferior a 127. O numero dado fica, pois, decomposto num producto de factores primos; isto é, 32004 é igual ao producto de 2 por 2 por 3 por 3 por 7 e por 127.

Costuma-se dispôr o calculo do seguinte modo:

32004	2
16002	2
8001	3
2667	3
889	7
127	127
1	

Applicando o mesmo processo á decomposição de 7657, verificar-se-ha que equivale ao producto de 13 por 19 e por 31; de modo que este numero tem apenas quatro factores primos, inclusive a unidade.

300. — REGRA DA OPERAÇÃO. — Pelo que precede, póde-se construir a seguinte *regra para decompôr um numero em seus factores primos*:

Ensaia-se a divisão do numero proposto successivamente pelos numeros primos, em sua ordem natural, e effectua-se a operação para cada divisor tantas vezes quantas forem possiveis, até achar-se para quociente um numero primo.

Comprehende-se que assim procedendo, teremos decomposto o numero considerado em seus factores primos; porque o dividendo primitivo torna-se igual ao producto dos divisores primos successivos pelo quociente final, que tambem é primo. Desde então a operação poderá ser verificada recompondo o numero proposto, mediante a multiplicação deste quociente pelos divisores primos em ordem inversa daquella em que foram empregados.

Os caracteres particulares de divisibilidade pelos numeros 2, 3, 5, e 11, que indicamos em outro lugar, poderão evitar, como vimos, algumas tentativas, facilitando assim a operação.

301. — CONDIÇÃO DE DIVISIBILIDADE DE UM NUMERO POR OUTRO. — A decomposição precedente permitte deduzir a seguinte propriedade : *Para que um numero seja divisivel por outro é necessario e bastante que todos os factores*

primos do divisor se encontrem no dividendo pelo menos igual numero de vezes.

Com effeito, esta condição é necessaria ; porque o dividendo, sendo o producto do divisor pelo quociente, deve conter os factores que compõem o divisor, assim como os que compõem o quociente.

Esta condição é sufficiente ; porque, se fôr preenchida, poder-se-ha decompôr o dividendo em dois factores, um que conterá os factores que entram no divisor e o outro os factores que entram no quociente.

Determinação de todos os divisores de um numero. Em vista do que precede, os divisores de um numero, não podendo conter outros factores primos sinão os deste numero, é claro que para tel-os todos basta decompôr o numero dado em seus factores primos e combinal-os por multiplicação de todas as maneiras possiveis, de modo que em cada producto nenhum delles figure mais vezes do que no numero proposto. A unica precaução a tomar consiste em seguir uma marcha tal que não se possa omittir nem repetir nenhuma destas combinações.

Tomemos, por ex., 360, que decomposto em seus factores primos, equivale ao producto de 2 por 2 por 2 por 3 por 3 e por 5.

360	2											
180	2	4										
90	2	8										
45	3	6	12	24								
15	3	9	18	36	72							
5	5	10	15	20	30	45	40	60	90	120	180	360
	1											

O segundo divisor 2 combinado com o precedente fórma o divisor 4.

O terceiro divisor 2 combinado com os precedentes, dois a dois, não fórma divisor differente dos conhecidos, mas combinado com elles, tres a tres, fórma o divisor 8.

O quarto divisor 3 combinado com os precedentes, dois a dois, fórma o divisor 6, differente dos conhecidos; combinado com os mesmos, tres a tres, fórma um divisor differente, que é 12; e combinado quatro a quatro fornece o divisor 24.

O quinto divisor 3 combinado com os precedentes, dois a dois, fórma um divisor differente, 9; combinado tres a tres fornece o divisor differente 18; combinado quatro a quatro fórma o divisor 36.

Os mesmos divisores, combinados cinco a cinco, formam o divisor 72.

O sexto divisor 5 combinado com os precedentes, dois a dois, fornece os divisores 10 e 15; combinado tres a tres, fórma os divisores 20, 30 e 45; combinado quatro a quatro, produz os divisores 40, 60 e 90; combinados cinco a cinco, formam os divisores 120 e 180. Emfim, os mesmos divisores combinados seis a seis, produzem o divisor 360, que é o proprio numero dado. Contando com este e com a unidade, temos ao todo vinte e quatro divisores.

Eis aqui um meio mais simples de dispôr o calculo para obter estas combinações:

Sobre uma primeira linha horisontal escreve-se a unidade, que divide todos os numeros, e bem assim as diversas potencias do factor 2, isto é, os divisores que contêm sómente este factor.

Forma-se uma segunda linha horisontal multiplicando os numeros da primeira pelas potencias do factor 3, que figuram no numero proposto, que são portanto seus divisores. Assim, multiplicando 1 por estas potencias, tem-se divisores que contêm sómente o factor 3; multiplicando as diversas potencias de 2 pelas diversas potencias de 3, tem-se os divisores que encerram por sua vez os factores 2 e 3.

Forma-se uma terceira linha horisontal multiplicando os numeros contidos nas duas primeiras pelas diversas

potencias do terceiro factor, que aqui se reduzem á primeira, isto é, ao proprio factor 5. Multiplicando 1. por estas potencias, obtem-se os divisores que contêm sómente o terceiro factor primo; multiplicando as potencias de 2 por 5, tem-se os divisores que contêm conjunctamente os factores 2 e 5; multiplicando os numeros da segunda linha por 5, tem-se a principio os divisores que contêm os factores 3 e 5, e em seguida os divisores que encerram simultaneamente os factores 2, 3 e 5.

Nenhuma combinação foi, pois, esquecida.

Typo do calculo:

1 2 4 8
3 9 . 6 12 24 . 18 36 72
5 10 20 40 . 15 45 . 30 60 120 . 90 180 360

Vê-se que os divisores extremos são a unidade e o proprio numero dado.

Isto posto, torna-se facil deduzir da marcha adoptada a totalidade dos divisores que devem ser obtidos para um numero não primo qualquer.

A primeira linha encerra um numero de divisores assignalado pelo gráo da mais alta potencia do factor 2 accrescido de uma unidade, isto é, 3 mais 1 divisores.

A segunda linha, que foi obtida multiplicando a primeira pelas diversas potencias de 3, conterá 2 vezes mais divisores, por isso que para o factor 3 é 2 o mais alto gráo da potencia; tem-se, pois, 2 vezes a somma de 3 mais 1 divisores, isto é, 8.

As duas primeiras linhas reunidas encerrarão, pois, 3 mais 1 mais 2 vezes 3 mais 1 divisores; isto é, 3 vezes 3 mais 1 divisores, numero este que equivale ao producto de 2 mais 1 por 3 mais 1.

A terceira linha, que é obtida multiplicando as duas primeiras pelas diversas potencias do terceiro factor, con-

teria 2, 3...... vezes mais divisores do que estas duas linhas, si o gráo da mais alta potencia do terceiro factor fosse 2, 3.....; como porém este factor figura apenas 1 vez, a terceira linha contém sómente um numero de divisores igual ao producto já obtido de 2 mais 1 por 3 mais 1.

As tres linhas reunidas encerrarão, portanto, um numero de divisores representado pela somma de 2 mais 1 multiplicado por 3 mais 1 com 2 mais 1 multiplicado por 3 mais 1; isto é, o numero total de divisores será expresso por 2 vezes 2 mais 1 multiplicado por 3 mais 1, que equivale a 1 mais 1 multiplicado por 2 mais 1 multiplicado por 3 mais 1, ou a 24.

A lei torna-se evidente: *Para ter a totalidade dos divisores de um numero, basta juntar 1 ao gráo da potencia de seus factores primos differentes e multiplicar entre si os resultados obtidos.*

Ella permitte verificar si o numero de divisores obtidos está completo.

Consequencias. — Pela constituição dos productos acima, que formam os divisores compostos do numero considerado relativamente aos seus divisores primos, se conclue facilmente: 1.° *Que todo o divisor primo de um producto de dois ou mais factores divide pelo menos um destes factores.* 2.° *Que todo o numero primo que divide um producto de dois factores, e é primo com um delles, divide necessariamente o outro.* 3.° *Que todo o divisor primo de uma potencia de um numero qualquer divide necessariamente este numero.*

302. — A SIMPLIFICAÇÃO DAS FRACÇÕES BASEADA NA DECOMPOSIÇÃO DE SEUS TERMOS EM FACTORES PRIMOS. — Sabendo decompôr os numeros em seus factores primos, póde-se por este meio simplificar uma fracção qualquer, supposta susceptivel de tal transformação. Decompondo com effeito o numerador e o denominador em seus factores primos, poderemos supprimir em seguida todos aquelles que forem

communs a ambos ; porque já vimos que uma fracção não se altera quando os seus termos são divididos pelo mesmo numero.

Desde então a simplificação estará operada, visto como nenhum numero poderá dividir mais aquelles termos, que serão, portanto, primos entre si.

Supponhamos, por exemplo, que se trata de simplificar a fracção $\frac{15708}{39270}$.

Decompondo ambos os termos em seus factores primos, acha-se

15708	2	39270	2
7854	2	19635	3
3927	3	6545	5
1309	7	1309	7
187	11	187	11
17	17	17	17

Supprimindo os factores 2, 3, 7, 11 e 17, communs ao numerador e ao denominador, restará no primeiro 2 e no segundo 5. Portanto $\frac{2}{5}$ é a fracção irreductivel procurada, porque não admitte mais nenhum divisor commum.

Podemos, pois, construir a seguinte regra: *Decompõem-se o numerador e o denominador em seus factores primos e supprimem-se todos aquelles que lhes forem communs.*

Embora este processo seja sempre applicavel e possa mesmo ser facilitado em muitos casos pelo conhecimento dos caracteres de divisibilidade inherentes aos mais simples numeros primos, o que permitte reconhecel-os á simples inspecção e supprimil-os successivamente, elle póde contudo tornar-se trabalhoso. E' o que terá, por exemplo, logar quando os divisores primos fôrem numeros um tanto consideraveis, o que exigirá o conhecimento da respectiva *taboa*, ou pelo menos muitas tentativas.

Taes inconvenientes não offerece o segundo processo, baseado na pesquiza do *maior divisor commum*, que estudaremos no paragrapho seguinte.

§ x δ'(24)

Simplificação das fracções. Segundo processo baseado na determinação do maior divisor commum

303. — Concepção do maior divisor commum e sua inspiração geometrica. — Quando um numero divide dois ou mais outros é chamado seu *divisor commum*.

Entre todos os divisores communs de dois ou mais numeros, o maior de todos é denominado *maior divisor commum* e é de sua determinação que nos devemos occupar.

O maior divisor commum a dois numeros, isto é, o maior numero que estes contêm exactamente, teve sua origem na Geometria. Foi esta que inspirou similhante noção, pondo o problema, que consiste em *determinar a maior medida commum de duas rectas dadas*.

1.° Chamando AB e CD estas rectas e suppondo CD menor do que AB, é evidente que applicando aquella sobre esta, si AB contiver CD um certo numero de vezes, CD será a maior medida commum procurada.

2.° Si, porém, depois de applicar-se CD sobre AB umas tantas vezes, ficar um resto EB, menor conseguintemente do que CD, é claro que este resto será a maior medida commum procurada, desde que por sua vez se contenha um numero exacto de vezes em CD.

3.° Si esta ultima condição não se verificar, isto é, si houver um segundo resto FD, é obvio que, applicando-o sobre o primeiro, elle tornar-se-ha por seu turno a maior

(24) Numero *eikõssi kai téssaros* (ou téssara, tétaros, tétara) — vinte e quatro.

medida commum procurada, caso seja alli contido exactamente; e assim por deante. (24a).



304.—INSTITUIÇÃO DOS FUNDAMENTOS DO PROCESSO PARA A PESQUIZA DO MAIOR DIVISOR COMMUM.—Suppondo que se tenha expresso numericamente a maior medida commum das duas rectas consideradas e, por conseguinte, estas ultimas, a solução do problema precedente deixa vêr immediatamente:

1.° Que quando dois numeros são divisiveis exactamente um pelo outro, o menor é o *maior divisor commum* de ambos.

2.° Que no caso contrario, *maior divisor commum* de dois numeros é *o mesmo que existe entre o menor e o resto da divisão do maior pelo menor*, e que, portanto, este resto será o maior divisor commum aos numeros dados si dividir exactamente o menor destes.

3.° Que, no caso contrario, o maior divisor commum aos dois numeros é o mesmo que existe entre o resto precedente e o seguinte; e assim por diante.

Taes são os principios fundamentaes para a determinação do maior divisor commum a dois numeros: oriundos da Geometria, elles podem tambem ser estabelecidos arithmeticamente, mediante uma simples deducção:

(24a) Admittamos, por exemplo, que AB contém CD 3 vezes com um resto EB; que CD contém EB 4 vezes, com um resto FD; e finalmente que EB contém FD uma vez exactamente.

Teremos que AB será igual a 3 CD mais EB; CD igual a 4 EB mais FD; EB igual a FD; donde, por conseguinte, conclue-se que CD é igual a 4 EB mais EB ou a 5 EB; e que, portanto, AB é igual a 3 vezes 5 EB mais EB, isto é, a 16 EB; de modo que EB é a maior medida commum procurada.

Está subentendido que fazemos aqui a hypothese mais favoravel; porque, conforme veremos, póde acontecer que as duas grandezas não admittam nenhuma medida commum, sendo apenas possivel determinar então a relação approximada que entre ellas existe. (*Lacroix.—Elémens de Géometrie*—28° ed. Paris, 1880, pags. 3 e 4.)

1.° Sejam 360 e 180 os numeros dados. Este ultimo sendo um divisor exacto do primeiro, é o maior divisor commum a ambos. Com effeito, 180 dividindo a si mesmo e a 360, é um divisor commum; e é o maior, porque qualquer numero maior do que 180 que porventura dividisse 360, não poderia dividir 180.

2.° Sejam 53438 e 432 dois numeros dados, que não são divisiveis um pelo outro. E' facil mostrar que o m. d. c. a elles é o mesmo que existe entre o menor e o resto da divisão, quer se tome o quociente por *falta* ou por *excesso*.

I. Com effeito o quociente da divisão por *falta* é 123, e o resto é 302; de sorte que 53438 é igual a 432 multiplicado por 123 mais 302.

Ora, todo o divisor commum de 53438 e 432 divide 432, e por conseguinte 432 multiplicado por 123, como seu multiplo (243 — 3°), mas, por isso que divide 53438 e este producto, dividirá necessariamente 302, que é a differença entre ambos. (243 — 2°).

Reciprocamente, todo divisor commum de 432 e de 302, divide 432, e por conseguinte, 432 multiplicado por 123; e, por isso que divide 302, dividirá a somma desses dois numeros, isto é, 53438. (243—1°).

Do que precede conclue-se que os divisores communs de 53438 e 432 sendo os mesmos que os de 432 e 302, o maior divisor commum dos primeiros é igual ao dos ultimos.

II. Tomando agora o quociente por excesso, vemos immediatamente que 53438 é igual a 432 multiplicado por 142 menos 130.

Por um raciocinio analogo é facil mostrar que o maior divisor commum de 53438 e 432 é o mesmo que o maior divisor commum de 432 e 130. Porque o dividendo é, neste caso, igual ao producto do divisor pelo quociente menos o resto e já vimos que todo o divisor da somma 53438 e de uma das parcellas, é necessariamente divisor da outra par-

cella 130, e que reciprocamente, todo o divisor das parcellas 130 e 53438 é divisor da somma 432 vezes 124. Donde, por conseguinte, o maior divisor commum deve ser o mesmo.

3.° A ultima divisão precedente não sendo exacta, é facil tambem mostrar que o maior divisor commum entre o menor numero 432 e o resto é o mesmo que existe entre o primeiro resto e o segundo, isto é, entre 302 e 130, ou entre 130 e 42 (tomando o primeiro resto por excesso).

Com effeito, todo o divisor commum a 432 e 130 é divisor de 130 vezes 3, e por conseguinte é divisor da outra parcella 42; e, reciprocamente, todo divisor de 42 e 130 vezes 3 é divisor de 432. Logo, o maior divisor commum a 432 e 130 é o mesmo que existe entre 130 e 42.

Raciocinando do mesmo modo, verifica-se facilmente que o maior divisor commum entre o primeiro resto e o segundo é o mesmo que existe entre este segundo resto 42 e o terceiro 4. Porque, o segundo resto 130, sendo igual a 42 vezes 3 mais 4, vê-se pela mesma razão que o maior divisor commum a 130 e 42 é igual ao que existe entre 42 e 4.

Emfim, a divisão mostrando ainda que 42 é igual a 4 vezes 10 mais 2 e 4 igual a 2 vezes 2, concluimos que o maior divisor commum entre o segundo e terceiro resto é o mesmo que existe entre o terceiro, 4, e o quarto, 2, o qual é por conseguinte 2.

305. — Da concepção do processo. Regra para executal-o. Simplificações que comporta. — O que precede permitte sem esforço conceber o processo proprio á determinação do maior divisor commum a dois numeros.

Vê-se que para este fim « *divide-se o maior pelo menor; si a divisão fôr exacta, o menor será o maior divisor commum; si o não fôr, divide-se o primeiro resto pelo segundo, e si esta nova divisão fôr exacta, o segundo resto será o maior divisor commum; no caso contrario, divide-se o*

segundo resto pelo terceiro, e assim por diante até chegar-se a um resto nullo, o que não póde deixar de acontecer, por isso que os restos vão decrescendo successivamente. O ultimo divisor obtido será o maior divisor commum procurado».

Costuma-se dispôr o calculo do seguinte modo, onde se vê que, em logar de escrever o quociente abaixo do divisor, escreve-se-o acima.

Esta modificação na disposição habitual do calculo da divisão tem a vantagem de permittir que se escrevam seguidamente as divisões successivas.

Eis o typo do calculo:

	124	3	3	10	2
53438	432	130	42	4	2
1023	042	04	02	0	
1598					
1728					
130					

Obtemos o mesmo resultado tomando o 1° quociente por *falta*, isto é, tornando o 1° resto *addictivo*, como se vê em seguida.

	123	1	2	3	10	2
53438	432	302	130	42	4	2
1023	130	042	04	02	0	
1598						
302						

Mas, comparando os dois calculos, observa-se que no 1°, onde empregamos o resto *subtractivo*, ha uma divisão de menos.

Para comprehender o motivo de similhante abreviação, notemos que a somma dos dois restos, subtractivo e addictivo é igual ao divisor. Portanto, quando o resto addictivo é maior que a metade do divisor, o resto subtractivo é menor.

Ora, a determinação do maior divisor commum de dois numeros sendo tanto mais rapida quanto mais depressa se diminuirem os restos, é claro que a operação se simplifica tomando-se o menor dos restos.

Deve-se, pois, preferir sempre o resto subtractivo quando o resto addictivo fôr maior que metade do divisor. A cada transformação dum resto addictivo, maior do que a metade do divisor, em resto subtractivo corresponde uma divisão de menos, porque a differença entre os dois processos é que o resto subtractivo empregado não é mais do que o resto addictivo, fornecido pela divisão seguinte, quando se opéra pelo modo ordinario.

Outras simplificações da pesquiza. Além da simplificação precedente, a determinação do m. d. c. comporta as seguintes:

1.ª Si no curso da operação se conhece o m. d. c. de dois restos, é inutil proseguil-a; porquanto vimos precedentemente que dois restos consecutivos quaesquer têm o mesmo m. d. c. que os numeros dados.

2.ª Si no curso da operação se encontrar um resto que não divida o precedente, é inutil proseguil-a, pois é certo que os numeros propostos são primos entre si.

Com effeito, todo o divisor commum aos dois numeros dados divide todos os restos que apparecem na operação; logo, no caso de ser primo um dos restos, os unicos divisores communs aos numeros propostos só podem ser este resto e a unidade; e, como esse resto não divide o precedente nem, por conseguinte, os numeros dados, segue-se que o unico divisor desses numeros é a unidade, o que significa serem elles primos entre si.

3.ª Si no curso da operação descobrir-se, á primeira vista, um factor commum, quer aos numeros dados, quer a dois restos consecutivos, veremos que se póde supprimil-o, contanto que seja multiplicado pelo m. d. c. finalmente achado. Tal suppressão póde reduzir consideravelmente o numero de divisões successivas necessarias á operação. (24b).

(24b) O numero de divisões successivas necessarias á pesquiza do m. d. c. não póde exceder á metade do menor dos dois numeros dados.

Assim, por ex., tratando-se de obter o m. d. c. a 36800 e 24000, poder-se-ha dividir estes dois numeros por 100 e procurar o m. d. c. dos quocientes 368 e 240, que é 16. Para ter em seguida o m. d. c. procurado, bastará multiplicar 16 por 100.

306. — APRECIAÇÃO DO MAIOR DIVISOR COMMUM DE MUITOS NUMEROS. PROCESSO SIMPLIFICADO QUE COMPORTA. OCIOSIDADE PRATICA DESTE CASO. — Considerando tres, quatro, cinco, etc. numeros, é evidente que elles podem admittir muitos divisores communs e é sempre possivel determinar o maior dentre estes, embora similhante pesquiza não offereça nenhuma utilidade pratica.

Póde-se, com effeito, reduzir a determinação do m. d. c. de muitos numeros á de dois numeros, attendendo a que o *m. d. c. a muitos numeros não se altera substituindo dois dentre elles pelo seu m. d. c.*

Com effeito, consideremos, por ex., tres numeros inteiros quaesquer e supponhamos determinado o m. d. c. ao 1° e ao 2°.

Todo o divisor commum dos tres numeros propostos, dividindo em particular os dois primeiros, divide como vimos todos os restos da operação do m. d. c. e, por conseguinte, o proprio m. d. c., que é um desses restos; logo, todos os divisores communs aos numeros propostos são divisores communs ao m. d. c. dos dois primeiros e ao terceiro.

Reciprocamente, todo o numero que dividir o m. d. c. aos dois primeiros divide estes, como seus multiplos; logo, todos os divisores communs ao m. d. c. dos dois primeiros e ao terceiro são divisores dos tres numeros

---

Porque os dois ultimos divisores são os unicos restos consecutivos que podem differir sómente de uma unidade, por isso que a divisão de dois desses numeros no caso menos favoravel dá a unidade para resto. De sorte que dois outros restos consecutivos quaesquer differem pelo menos de duas unidades e, portanto, não póde haver mais restos differentes do que o numero de vezes que 2 é contido no menor dos numeros propostos.

considerados. Ora, si os divisores communs aos tres numeros propostos o são tambem do m. d. c. dos dois primeiros e do terceiro, conclue-se que o m. d. c. que existe entre estes dois numeros é igual ao daquelles tres.

Raciocinando do mesmo modo mostrar-se-hia que a pesquiza do m. d. c. a quatro numeros se reduz á determinação do m. d. c. de tres numeros e, por conseguinte, á de dois; que a pesquiza do m. d. c. de cinco numeros reduz-se á determinação do m. d. c. de quatro numeros e, portanto, á de tres e, finalmente, á de dois numeros; e assim por diante.

Seja, por ex., proposto achar o m. d. c. a 96, 60, 42 e 12. Procurando o m. d. c. a 12 e 42 acha-se 6; substituindo 12 e 42 por 6, reduz-se a questão a procurar o m. d. c. a 6, 96 e 60, e assim por diante, obtendo-se o mesmo numero 6 para m. d. c. procurado.

Do que precede póde-se, pois, construir a seguinte regra: « *Procura-se o m. d. c. a dois dos numeros propostos; depois o m. d. c. ao numero achado e a um dos numeros restantes; em seguida o m. d. c. ao ultimo numero achado e a um dos numeros que restam e assim até o ultimo dos numeros dados. O ultimo numero será o m. d. c. pedido.* »

Na pratica ha toda a vantagem em dispôr os numeros dados, como fizemos acima, isto é, por ordem de grandeza decrescente, de modo a operar finalmente sobre o menor delles. Porque, póde acontecer que o m. d. c. procurado seja o menor dos numeros considerados; e, procedendo como dissemos, diminue-se geralmente o numero de divisões a effectuar.

Quando o m. d. c. de muitos numeros é igual á unidade, elles são chamados conjunctamente *primos entre si*.

Simplificação. O processo precedente póde ser simplificado attendendo-se a que o *maior divisor commum de muitos numeros é igual ao maior divisor commum do menor delles e dos restos das divisões dos outros pelo menor*.

Com effeito, dividamos cada um dos numeros considerados pelo menor delles, que suppomos ser o 1°. Admittindo que taes divisões não sejam exactas, e attendendo a que cada um dos numeros propostos torna-se igual a um multiplo do menor addicionado ao resto da respectiva divisão, podemos concluir:

1.° Que todo o divisor commum dos numeros propostos dividindo em particular o 2° e o 1°, o 3° e o 1°, o 4° e o 1°..... dividirá necessariamente o 1°, o 2°, o 3°, o 4°........ restos obtidos naquellas divisões; e por conseguinte, todo o divisor commum dos numeros propostos é divisor commum do menor e dos restos das divisões respectivas por esse menor.

2.° Que, reciprocamente, todo o divisor commum do menor e de cada um destes restos divide necessariamente o numero proposto cuja divisão o produziu; e, portanto, todo o divisor commum do menor e de taes restos é divisor commum dos numeros propostos.

Destas duas consequencias resulta finalmente que os divisores communs dos numeros propostos são iguaes aos divisores communs do menor delles e dos restos das respectivas divisões por este menor; e que, por conseguinte, o maior divisor commum dos primeiros numeros é o mesmo que o dos segundos.

Supponhamos, por exemplo, que sejam 264, 360, 420 e 468 os numeros de que buscamos o maior divisor commum. Dividindo esses numeros pelo menor 264, é claro que o maior divisor commum dos numeros dados é igual ao maior divisor commum dos seguintes: 156, 264, 204, 96, (2) que são os restos das divisões dos propostos por 264. O maior divisor commum destes numeros (2) é igual por sua vez ao dos numeros seguintes: 60, 72, 12, 96, (3) que são os restos das divisões dos numeros (2) pelo menor delles, 96.

Dividindo os numeros (3) pelo menor delles 12, e as differentes divisões fazendo-se exactamente, 12 é o maior divisor commum dos numeros dados.

Do que precede conclue-se a seguinte regra *abreviada*:

«Para achar-se o maior divisor commum de muitos numeros, dividem-se todos elles, excepto o menor, por este menor, e substituem-se a estes numeros os restos de suas divisões pelo menor; obtem-se uma nova série de outros numeros, menores que os numeros dados, e sobre os quaes opera-se da mesma maneira, e assim successivamente até chegar-se a dois numeros, cujo maior divisor commum será o dos numeros propostos.» Este processo é, como se vê, uma generalisação do que estabelecemos para determinar o m. d. c. a dois numeros. Neste caso, como naquelle, o emprego dos restos subtractivos póde abreviar o numero de divisões successivas.

Supponhamos, por exemplo, que dispondo os numeros dados por ordem de grandeza crescente, sejam estes 672 1320, 2712 e 5208.

Dividindo pelo primeiro cada um dos restantes, obtem-se os restos 24, 24 e 168, dos quaes o segundo é addictivo, sendo o primeiro e o terceiro subtractivos. Dois destes restos obtidos sendo iguaes, a questão reduz-se a achar o m. d. c. dos tres numeros 24, 168 e 672. Ora, 24 dividindo exactamente 168 e 672, é evidentemente o m. d. c. procurado.

Vê-se assim que empregando os restos subtractivos, em vez dos addictivos, evitamos tres divisões.

310. — Das propriedades do maior divisor commum. —Dos processos precedentes concluem-se deductivamente as seguintes propriedades do maior divisor commum:

1ª. «Quando se multiplicam ou dividem dois ou mais numeros por outro, o m. d. c. fica multiplicado ou dividido por esse numero.»

I. Com effeito multiplicando ou dividindo os dois numeros por um terceiro, sabemos que o quociente não se altera, mas que o resto vem multiplicado ou dividido por este terceiro. Ora, similhante, circumstancia tendo lugar para todos os restos encontrados, e o m. d. c. sendo o ultimo destes restos, concluimos que elle tambem fica multiplicado ou dividido pelo mesmo numero.

II. No caso de muitos numeros, a mesma propriedade verifica-se para o respectivo m. d. c.

Com effeito, vimos que o m. d. c. a muitos numeros se obtém determinando o m. d. c. do 1° e 2°, do resultado obtido e do 3°, do novo resultado e do 4°, e etc.

Ora, multiplicando ou dividindo os numeros considerados por um outro, acabamos de vêr que o m. d. c. ao primeiro e ao segundo fica multiplicado ou dividido por este outro ; pela mesma razão, o m. d. c. do resultado obtido e do terceiro fica ainda multiplicado ou dividido por aquelle numero ; o que tambem acontecerá finalmente com o ultimo m. d. c. obtido, que é o dos numeros propostos.

2.ª « Si dividirmos dois ou mais numeros pelo seu m. d. c., os quocientes serão primos entre si. »

Com effeito, acabamos de vêr que dividindo dois ou mais numeros por um outro, o seu m. d. c. fica dividido por esse outro. Ora, si este outro fôr o proprio m. d. c., o resultado será que o m. d. c. fica dividido por si mesmo. De sorte que o m. d. c. dos dois quocientes considerados é a unidade ; donde se conclue que elles são primos entre si.

3.ª *« Reciprocamente, se dividirmos dois ou mais numeros por outro numero tal que os quocientes sejam primos entre si, o divisor empregado é o m. d. c. aos numeros. »*

Com effeito, supponhamos que, tendo dividido dois numeros dados por um terceiro, os quocientes sejam primos entre si. E' evidente que cada um dos numeros propostos torna-se então equivalente ao producto do divisor commum

empregado pelo respectivo quociente. Ora, os dois quocientes obtidos sendo primos entre si o seu m. d. c. é 1 ; logo, o m. d. c. áquelles productos, ou aos numeros propostos, é 1 multiplicado pelo seu commum divisor.

311. — APRECIAÇÃO DO PROCESSO PARA SIMPLIFICAR AS FRACÇÕES, BASEADO NO M. D. C. A AMBOS OS SEUS TERMOS. CARACTER GERAL DA IRREDUCTIBILIDADE VERIFICADA POR ESTE PROCESSO. — Emfim, a propriedade de mais importancia do m. d. c. é a de servir de base á simplificação das fracções. Sabendo determinar o maior divisor commum a dois numeros, póde-se com effeito simplificar uma fracção qualquer.

Para isso « *determina-se o m. d. c. a ambos os termos da fracção e divide-se cada um delles por este m. d. c.*». Esta transformação é legitima e bastante. E' legitima, porque uma fracção não se altera quando ambos os seus termos são divididos por um mesmo numero. E' bastante, porque, dividindo dois numeros pelo seu m. d. c., vimos precedentemente que os quocientes são primos entre si, isto é, têm para m. d. c. a unidade. Por conseguinte, a fracção não poderá ser expressa em termos mais simples, sem mudar de valor. Assim, o caracter geral da irreductibilidade de uma fracção verifica-se por este processo pela existencia da unidade para maior divisor commum a ambos os seus termos.

Tomemos, por exemplo, a fracção $\frac{1515}{264418}$.

Procurando o maior divisor commum a ambos os termos, acha-se 101, o que mostra não ser irreductivel a fracção dada. Dividindo portanto cada um dos seus termos por 101, obtem-se a fracção equivalente $\frac{15}{2618}$, que é *irreductivel*.

312. — O CONFRONTO DOS DOIS PROCESSOS PARA SIMPLIFICAR AS FRACÇÕES, RELATIVAMENTE AOS SEUS RESULTADOS. COMPOSIÇÃO DO M. D. C. A DOIS OU MAIS NUMEROS POR MEIO DOS SEUS FACTORES PRIMOS. — Comparando os dois pro-

cessos que são empregados para simplificar as fracções, suppostas reductiveis, constata-se immediatamente a equivalencia dos respectivos resultados.

Tomemos, por exemplo, a fracção $\frac{15708}{39270}$, que simplificada pelo 1° processo, no paragrapho precedente, se reduziu a $\frac{2}{5}$ depois da suppressão dos factores primos 2, 3, 7, 11 e 17, communs a ambos os termos.

Applicando-lhe o 2° processo, isto é, procurando o m. d. c. a ambos os termos e dividindo-os por este numero, que é 7854, acha-se igualmente $\frac{2}{5}$ para valor da fracção irreductivel.

Appliquemos ainda os dois processos á fracção $\frac{180}{31416}$. Decompondo ambos os termos em seus factores primos e supprimindo os communs, que são 2, 2 e 3, acha-se, pelo 1° processo, a fracção irreductivel $\frac{15}{2618}$.

Procurando o m. d. c. a ambos os termos e dividindo-os por este numero, que é 12, obtem-se pelo 2° processo a mesma fracção $\frac{15}{2618}$.

Composição do m. d. c. a dois ou mais numeros por meio de seus factores primos. Si em cada um dos exemplos precedentes comparar-se o m. d. c. a ambos os termos da fracção com o producto dos factores primos que lhe são communs, reconhece-se a inteira equivalencia desses dois numeros: o producto de 2 por 3 por 7 por 11 e por 17 é igual a 7854; e o producto de 2 por 2 e por 3 ou do quadrado de 2 por 3 é igual a 12.

Aliás, era de prevêr a equivalencia desses dois numeros, sem a qual dividindo ambos os termos da fracção considerada por um e por outro, não se chegaria ao mesmo resultado.

Demais, cumpre notar a constituição do m. d. c. por meio dos factores primos, que compõem os numeros considerados.

Resulta immediatamente da comparação feita que « *o m. d. c. a dois numeros é igual ao producto dos factores primos que lhes são communs ou das respectivas potencias, tendo cada uma o menòr gráo que nelles se acha* ».

Similhante propriedade do m. d. c. póde ser directamente deduzida. Com effeito, sejam os numeros 1584 e 360. Decompondo-os em seus factores primos acha-se que 1584 é igual ao producto da 4ª potencia de 2 pela 2ª potencia de 3 e por 11; e que 360 é igual ao producto da 3ª potencia de 2 pela 2ª potencia de 3 e por 5. Tomando o producto da 3ª potencia de 2 pela 2ª potencia de 3, é facil mostrar que este numero é o m. d. c. aos numeros propostos:

1.° Este producto é effectivamente um divisor de 1584, visto que não contém factores primos differentes dos que se acham neste numero, e que nenhum delles figura no divisor mais vezes que no dividendo. (301). Pela mesma razão o referido producto é divisor de 360; e, por conseguinte, elle é divisor commum aos dois numeros considerados.

2.° E' o m. d. c. porque o quociente que resulta da divisão de 1584 por elle é

$$\frac{\text{o producto de 2 por 2 por 2 por 2 por 3 por 3 por 11}}{\text{o producto de 2 por 2 por 2 por 3 por 3}}$$

que é igual a 2 vezes 11 ou 22; e o quociente da divisão de 360 pelo mesmo numero é

$$\frac{\text{o producto de 2 por 2 por 2 por 3 por 3 por 5}}{\text{o producto de 2 por 2 por 2 por 3 por 3}}$$

que é igual a 5. Ora, sendo estes quocientes primos entre si, segue-se em vista da propriedade acima, que o divisor commum empregado é o m. d. c. aos numeros 1584 e 360.

Esta propriedade fornece, pois, um novo processo para achar o m. d. c. a dois ou mais numeros.

« *Decompõem-se os numeros em seus factores primos e effectua-se o producto dos factores primos communs a todos elles ou das respectivas potencias, tomando cada uma com o menor grão que nelles se acha.* »

A determinação do m. d. c. a muitos numeros não tem utilidade pratica: apenas a consignamos aqui tendo em vista o seu alcance logico.

Todavia da constituição do maior divisor commum de muitos numeros por meio dos seus factores primos, resulta immediatamente:

1.° Que se póde multiplicar ou dividir qualquer dos numeros propostos por um outro que não tenha factores communs a todos, sem que o m. d. c. fique alterado; porque, sendo o m. d. c. a dois ou mais numeros formado unicamente dos factores communs a todos elles, a introducção ou a suppressão de factores não communs a todos não podem influir no m. d. c.

2.° Que, descobrindo á primeira vista quaesquer factores communs aos numeros propostos ou a dois restos successivos da operação do m. d. c., póde-se supprimil-os, contanto que se os multiplique pelo m. d. c. finalmente obtido. (24c).

Estas duas consequencias permittem muitas vezes abreviar o numero de divisões successivas na pesquiza do m. d. c. pelo processo ordinario.

(24c) Esta consequencia póde ser considerada como resultando immediatamente da 1ª propriedade do m. d. c. acima citada.

CAPITULO IX

Extensão adquirida pelo calculo fundamental em virtude da instituição fraccionaria. (Addicção, subtracção, multiplicação e divisão das fracções ordinarias).

§ κε' (25)

Theoria da isomeria das fracções

313.— SOBRE A NECESSIDADE DO CALCULO FRACCIONARIO. — Vimos na theoria subjectiva dos numeros que elles foram instituidos para classificar. Mas o seu uso não tardou em patentear que da aptidão para classificar resultava a aptidão para contar, isto é, para designar as *pluralidades* ou grandezas descontinuas.

Tal foi a primeira transformação objectiva por que os numeros passaram. Essa transformação consistiu, porém, em dar um novo destino ás concepções numericas sem alterar a sua natureza.

Por fim, o desenvolvimento da vida social levou a applicar os numeros para representar as grandezas continuas, isto é, a empregar os numeros para *medir*. Essa nova extensão deu-se tambem sem alteração essencial da concepção primitiva.

Antes, porém, que esse ultimo passo se tivesse effectuado, já o uso das concepções numericas tinha feito surgir o *calculo,* isto é, a combinação dos numeros com o intuito de assignalar o lugar do numero resultante na escala numerica, dispensando-se tanto quanto possivel da contagem.

---

(25) Numero *eikõssi kai pente* (vinte e cinco).

O calculo primitivo comprehendeu a addicção, a subtracção e a multiplicação. Quanto á divisão, se bem que um dos problemas que determinaram si tivesse offerecido desde o primeiro surto da vida social, a sua natureza não permittiu que ella fosse decisivamente instituida sinão no dominio do theologismo.

As tres operações fetichicas, comquanto applicando-se ás grandezas continuas da mesma sorte que ás grandezas descontinuas, nenhuma alteração motivaram na concepção inicial do numero.

Mas, a applicação dos numeros para *medir*, isto é, para a determinação das grandezas continuas, abriu ás combinações numericas o seu mais vasto campo. E, para que este fosse explorado, era apenas necessario que o desenvolvimento social conduzisse a generalisar a combinação das grandezas continuas. Foi o que se deu com a astrolatria e com a expansão da existencia sedentaria, que vieram occasionar o surto da *divisão*. Conforme vimos, este passo veio em breve mostrar a insufficiencia das concepções numericas anteriores.

A necessidade de estabelecer a harmonia entre o *abstracto* e o *concreto*, entre o *calculo* e os *problemas* que a solicitaram, conduziu então a Humanidade á noção das *fracções*.

Desde então, a comparação das grandezas continuas apresentou-se em geral como exigindo dois numeros para exprimir umas por meio das outras. E como, mesmo no caso em que um só numero basta, esse numero póde tomar a fórma fraccionaria, o *quociente* ou *razão geometrica* tornou-se a expressão normal das grandezas continuas.

Ao mesmo tempo o surto theorico ficando dependente da applicação dos numeros, mais para *medir* do que para *contar*, a noção fetichica do numero teve de ficar subordinada á concepção theocratica.

Assim, os numeros passaram a ser vulgarmente considerados como representando as *grandezas continuas*, e, portanto, como devendo affectar a fórma fraccionaria.

Mas, essa subordinação é mais apparente do que real, porque os *termos* das fracções são numeros considerados conforme a concepção fetichica.

Tal foi o ponto de chegada da evolução theorica considerada no capitulo precedente. Delle resulta immediatamente a necessidade de estender ás fracções o conjuncto do calculo que fôra instituido para os numeros fetichicos, isto é, para os numeros inteiros. Essa extensão é duplamente exigida, não só porque as fracções podem concorrer com os numeros inteiros, mas tambem porque todos os numeros podem tomar a fórma fraccionaria.

314.— A ISOMERIA COMO BASE GERAL DO CALCULO FRACCIONARIO. — Mas, as mesmas considerações que nos mostram a necessidade do calculo fraccionario, assignalam as condições de sua instituição. Porque, em primeiro lugar é evidente que esse calculo póde ser supposto sempre como entre fracções, pois que os numeros inteiros podem tomar a fórma de quociente com qualquer denominador. *Basta para isso multiplicar e dividir ao mesmo tempo o numero considerado por aquelle que deve servir de denominador*.

Uma vez achadas as regras para as combinações entre fracções, basta examinar os resultados para especificar as modificações que ellas comportam quando em um calculo concorrem numeros inteiros e fracções.

Em segundo lugar, o espirito geral do calculo arithmetico, consistindo, como temos visto, em fazer entrar o caso mais complicado no mais simples, toda a difficuldade do calculo fraccionario se resume em reduzil-o ao dos numeros inteiros.

Ora, o exame da concepção fraccionaria suggere logo o artificio indispensavel ao conseguimento desse objectivo. Porque directamente considerada, cada fracção se nos apre-

senta como a expressão de uma grandeza em que a unidade é parte da unidade convencionada. De sorte que as fracções differem umas das outras, já porque indicam numeros diversos de módulos (numerador), já porque esses numeros são referidos a *módulos* distinctos (denominador). Mas, os numeros só podem ser combinados quando referidos á mesma unidade.

Com effeito, calcular é determinar o logar que um numero occupa na escala arithmetica, e essa escala é formada suppondo o mesmo módulo para todos os seus termos. E', portanto, evidente que a escala arithmetica e os numeros que se combinam devem ser expressos por um módulo commum.

Para bem ajuizar desta necessidade, convém observar que se trata aqui de achar um numero inteiro ou fracção que exprima a mesma grandeza que a combinação proposta. Porque, si se desiste desta condição, é facil de reconhecer que uma grandeza póde ser determinada pela combinação de numeros com módulos diversos.

Assim, o comprimento de uma linha fica perfeitamente determinado si dissermos que ella é a somma ou a differença de um certo numero de palmos e um certo numero de metros. A área de um rectangulo fica igualmente determinada si dissermos que um dos lados tem um certo numero de pés e o outro lado um certo numero de braças. A relação entre duas grandezas fica precisa, desde que sabemos que ella é igual ao quociente de um certo numero de varas por um certo numero de toezas. E assim por diante.

Em qualquer desses casos, desde que se conhecem os módulos com os quaes as grandezas combinadas foram medidas, a combinação está definida. Mas essa combinação não póde ser expressa com o *termo* de uma certa escala arithmetica, sem que os seus elementos constituintes sejam medidos pelo módulo adoptado em tal escala.

Portanto, para que as fracções possam ser combinadas de modo que o resultado da combinação seja expresso por uma fracção tambem, desde que ellas exprimem grandezas medidas com um certo módulo, é claro que ellas devem ser referidas ao mesmo módulo. Isto é, o denominador deve ser o mesmo para todas. Satisfeita essa condição, o calculo das fracções reduz-se aos dos numeros inteiros, e não exige sinão a combinação dos numeradores.

Mas, é claro que essa condição póde ser sempre satisfeita; porque cada fracção é susceptivel de uma infinidade de expressões. Nós podemos, pois, escolher entre essa immensidade de representações as que corresponderem ao mesmo denominador. Assim, o problema do calculo fraccionario se nos offerece, de um modo geral, como repousando na reducção das fracções ao mesmo denominador.

Essa operação constitue a *isomeria*.

315.— USO DA ISOMERIA SEGUNDO A SUA CONCEPÇÃO.— Para fazer com que duas fracções adquiram o mesmo denominador, nós só podemos actuar de dois modos: ou procurando tornar o denominador de uma igual ao da outra, ou dando a ambas um denominador commum, diversos dos que ellas contêm.

Ambas essas hypotheses dão logar a uma distincção; porque, na primeira, póde-se tentar reduzir o maior denominador ao menor ou vice-versa; e, na segunda, póde-se experimentar dar ás duas fracções um denominador menor ou maior do que os que ellas contêm.

Em resumo, a isomeria é conseguida ou diminuindo um pelo menos dos denominadores propostos ou augmentando ambos.

Ora, vimos no capitulo precedente que para augmentar ou diminuir um dos termos de uma fracção, sem alterar o seu valor, era necessario augmentar ou diminuir na mesma proporção o outro termo. Conclue-se dahi que, para tornar

duas fracções isomeras, havemos de dividir ou de multiplicar ambos os termos de cada uma por numeros convenientemente escolhidos. Expliquemo-nos para fixar as idéas.

Supponhamos que temos as fracções $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{15}$ que se pretende reduzil-as ao mesmo denominador.

Vejamos si é possivel exprimir uma pelo denominador da outra.

Para reduzir o maior denominador 15 ao menor 5, é necessario que 15 seja multiplo de 5, o que se verifica pela divisão. No caso actual a divisão é possivel e dá o quociente 3. Mas para que a segunda fracção se transforme em outra que tenha para denominador 5 é tambem preciso que o seu numerador seja divisivel por 3, quociente do maior denominador pelo menor.

Essa divisão é possivel no nosso exemplo, e a fracção $\frac{6}{15}$ reduz-se á outra equivalente $\frac{2}{5}$, que tem o mesmo denominador de $\frac{3}{5}$.

Mas, pela marcha desta operação, vê-se que o exito della é incerto. Com a esperança de simplificar o calculo, nos exporiamos a calculos ociosos.

O mesmo aconteceria si quizessemos transformar o menor denominador no maior. Porque, como no caso precedente, isto só seria possivel si o maior fosse multiplo do menor, o que só a divisão nos permittiria verificar. Reconhecido que um denominador era multiplo do outro, bastaria multiplicar ambos os termos da menor fracção pelo quociente obtido.

Assim, no exemplo acima, $\frac{3}{5}$ transforma-se em $\frac{9}{15}$, multiplicando ambos os termos por tres, quociente de 15 por 5.

Esta segunda transformação é mais facil do que a primeira, pois apenas exige uma divisão. Mas o exito do calculo é tambem incerto por causa dessa mesma divisão.

Esses dois processos, pelo seu caracter excepcional, não

podem, pois, ser acceitos como a solução normal do problema que nos occupa.

Consideremos os outros dois casos da segunda hypothese. Vejamos quaes seriam as condições para dar ás duas fracções um denominador menor do que o que ellas contêm.

Para isso era necessario em primeiro lugar que os dois denominadores tivessem um divisor commum. Porque, para dar a uma fracção um denominador menor do que aquelle que ella possue, é necessario que o denominador antigo seja multiplo do novo.

Em segundo lugar, seria necessario que o numerador de cada fracção fosse multiplo do quociente do seu denominador antigo pelo novo.

Por exemplo, as fracções $\frac{15}{50}$ e $\frac{6}{30}$ têm 10 para divisor commum de seus denominadorese. Demais, o numerador da primeira, 15, é divisivel por 5, quociente de 50 por 10. E 6, numerador da 2ª, é divisivel por 3, quociente de 30 por 10. De sorte que as duas fracções se reduziram ás duas $\frac{3}{30}$ e $\frac{2}{10}$ mediante a divisão de ambos os termos por 5, na primeira, e por 3 na segunda.

Esse processo é tambem de um exito incerto e não póde por isso constituir a solução normal do problema.

Consideremos o ultimo caso, isto é, aquelle em que se tem em vista achar um denominador commum maior do que os que as fracções contêm.

Em primeiro lugar, esse denominador commum deve ser multiplo dos dois pelos quaes as fracções se acham expressas.

Em segundo lugar, será necessario multiplicar o numerador de cada fracção pela relação entre o novo denominador e o denominador primitivo della.

Ora, assim encarada, a operação se apresenta como realisavel sem a minima incerteza. Porque é sempre possivel e facil determinar um multiplo commum de dois numeros.

316. — DA SOLUÇÃO MAIS ESPONTANEA: SUA APRECIAÇÃO. — A solução mais espontanea, e por isso mesmo a preferivel habitualmente, consiste em tomar para multiplo commum o producto dos dois denominadores.

Desde então, para tornar isomeras as duas fracções, seremos levados a *multiplicar ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra.*

Mas, essa marcha póde conduzir a um multiplo muito grande dos dois denominadores. Esse inconveniente póde dar-se mais facilmente quando os denominadores primitivos já são consideraveis. (25a).

Dahi a necessidade de instituir um processo que permitta escolher para denominador commum o *menor multiplo commum* dos denominadores considerados.

320. — APRECIAÇÃO DA SOLUÇÃO BASEADA NA COMPOSIÇÃO DO MENOR MULTIPLO COMMUM. — Chama-se *menor multiplo commum* a dois ou mais numeros o menor dos numeros divisiveis exactamente por cada um delles.

Si o maior dos numeros dados fôr divisivel por todos os outros, é evidente que é elle o menor multiplo.

Não o sendo, basta multiplical-o por 2, 3, 4, etc., até achar um numero divisivel.

E' esse o processo espontaneo para determinar o menor multiplo de dois ou mais numeros. Como, porém, é quasi sempre mui longo, recorre-se de ordinario ao processo systematico, baseado na decomposição dos numeros propostos em seus factores primos. (266).

Para comprehendel-o lembremos que a condição necessaria e bastante *para que um numero seja multiplo de outro é que elle contenha todos os factores primos desse outro,*

(25a) Notas do Curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.

cada factor figurando no multiplo tantas vezes pelo menos quantas entra no submultiplo. (301).

Logo, «*para que um numero seja o menor multiplo de outros é necessario que contenha todos os factores primos differentes que se acham nesses numeros, estando cada um elevado á mais alta potencia com que nelles figura.*»

Sejam, por ex., os numeros 480 e 756.

Decompondo-os em seus factores primos acha-se que o 1° é igual ao producto de 2 elevado a 5ª potencia por 3 e por 5; e que o 2° é igual ao producto de 2 elevado a 2ª potencia por 3 elevado a 3ª e por 7. E' facil mostrar que o menor multiplo commum daquelles numeros é igual ao producto de 2 elevado a 5ª potencia por 3 elevado a 3ª por 5 e por 7.

Com effeito, este producto contendo todos os factores primos que entram nos numeros propostos e cada um desses factores estando elevado a uma potencia pelo menos igual á que tem nos numeros considerados, é como vimos (301) um multiplo de todos aquelles numeros.

E é o *menor multiplo* delles, porque qualquer outro multiplo dos numeros propostos contém todos os factores primos desses numeros e por conseguinte os daquelle producto, não podendo, portanto, ser menor do que elle.

Quando o maior dos numeros dados é exactamente divisivel pelos outros, elle é o menor multiplo commum a todos; porque um multiplo menor não poderia ser divisivel por elle, embora o fosse pelos demais. Assim, por ex., considerando os numeros 48, 24 e 6, vê-se immediatamente que 48 é o m. m. c. aos tres.

A determinação do m. m. c. a mais de dois numeros obedece á mesma regra.

Na pratica, abrevia-se o calculo escrevendo sómente os divisores primos communs que entram mais vezes nos numeros propostos, para multiplical-os em seguida pelos quocientes finaes.

E' o que se vê em seguida, onde determinamos o m. m. c. a 360, 756 e 594 :

2	360	756	594
2	180	378	297
2	90	189	
3	45		
3	15	63	99
3	5	21	33
		7	11

O m. m. c. compõe-se, pois, do producto da 3ª potencia de 2 pela 3ª potencia de 3, por 5, por 7 e por 11. E' pois 8316.

Em vista das considerações precedentes conclue-se que, sendo dadas duas fracções e tendo *decomposto os denominadores respectivos em seus factores primos, para formar o menor multiplo commum delles é necessario e bastante constituir o producto de todos os factores primos que entrarem em ambos, tomando cada factor tantas vezes quantas encerra o donominador que mais o contiver.*

Esta lei nos mostra que o producto dos denominadores complica demasiado a isomeria quando elles têm algum factor commum.

Para tornar as fracções isomeras, depois de conhecido o menor multiplo commum dos denominadores, divide-se este por cada um dos mesmos denominadores e multiplica-se o quociente obtido pelo respectivo numerador. Como o menor multiplo e cada um dos denominadores acham-se decompostos em seus factores primos, é evidente que para dividir aquelle por qualquer destes bastará supprimir no dividendo todos os factores que figurarem no divisor. O producto dos factores restantes será o quociente procurado, que se multiplicará pelo numerador correspondente.

Consideremos, por ex., as fracções $\frac{23}{1980}$ e $\frac{17}{1470}$.

Decompondo os denominadores em seus factores primos, acha-se que 1980 equivale ao producto de 2 por 2 por 3 por 3 por 5 e por 11; e que 1470 é o producto de 2 por 3 por 5 por 7

e por 7. O menor multiplo commum desses dois numeros é, pois, constituido pelo producto de 2 por 2 por 3 por 3 por 5 por 7 por 7 e por 11.

Dividindo este m. m. c. por cada um dos denominadores acima, obtêm-se para valores dos respectivos quocientes 7 vezes 7 e 2 vezes 3 vezes 11.

Multiplicando estes quocientes pelos numeradores respectivos das fracções dadas e tomando para denominador commum o m. m. c. obtido, teremos as fracções isomeras

$$\frac{23 \text{ vezes } 7 \text{ vezes } 7}{97020} \quad \text{e} \quad \frac{17 \text{ vezes } 2 \text{ vezes } 3 \text{ vezes } 11}{97020}\cdot$$

ou

$$\frac{1127}{97020} \quad \text{e} \quad \frac{1122}{97020},$$

que são equivalentes ás propostas.

Outro modo para determinar o m. m. c. de dois numeros, por meio do seu m. d. c.

Póde-se tambem determinar o *menor multiplo commum de dois numeros* por meio do seu maior divisor commum.

Conhecido este, *basta multiplicar os numeros dados um pelo outro e dividir o producto pelo seu maior divisor commum: o quociente será o menor multiplo commum procurado.*

Com effeito, supponhamos conhecido o m. m. c. procurado e que se o tenha multiplicado pelo m. d. c. dado.

E' evidente que o producto obtido conterá, não só todos os factores communs aos numeros propostos elevados ás menores potencias, mas tambem todos estes factores elevados ás maiores, e bem assim os factores não communs. Similhante producto compor-se-ha, portanto, de todos os factores primos que constituem os numeros propostos e será, por conseguinte, igual ao producto delles. Mas, si o

producto dos numeros propostos deve ser igual ao producto do menor multiplo commum procurado pelo maior divisor commum dado, é evidente que dividindo aquelle producto por este numero, teremos o outro.

Assim, por exemplo, o m. m. c. dos numeros 24 e 16 será igual ao producto de 24 por 16 dividido por 8, que é o m. d. c. daquelles dois numeros. Como, porém, o m. d. c. a dois ou mais numeros divide sempre esses numeros, póde-se abreviar a regra acima enunciando-a deste modo: *Para obter o m. m. c. de dois numeros divide-se um delles pelo m. d. c. e multiplica-se o quociente obtido pelo outro.*

Assim, no exemplo precedente, dividiremos 16 por 8 e multiplicaremos o quociente 2 por 24, o que dá 48 para o m. m. c. procurado.

321.—Da instituição do calculo no caso de muitas fracções.—Para obter a isomeria pelo processo espontaneo não se precisa comparar sinão duas fracções : 1°, pela razão geral de que não se póde em cada calculo combinar de cada vez mais de dois numeros ; 2°, pela razão especial de que duas fracções tornadas isomeras não fazem mais que uma para toda extensão ulterior da mesma operação.

Com effeito, o que fôr preciso fazer com uma para tornal-a isomera com as restantes, será necessario fazer com a outra.

Assim, se tivermos 3 fracções, applicando o primeiro processo ás duas primeiras, teremos que multiplicar ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra. Isto posto, para tornar a segunda, assim transformada, isomera com a ultima, será necessario multiplicar ambos os termos desta pelo denominador da segunda, e ambos os termos desta pelo denominador da terceira.

Mas, o denominador da segunda depois de transformada, já sendo o producto dos dois primeiros denominadores, vê-se que o denominador commum das duas ultimas torna-se o

producto dos tres denominadores. E quanto aos numeradores, vêm a ser o producto do numerador primitivo pelos dois denominadores das outras fracções.

Applicando o mesmo calculo á primeira fracção, se reconhecerá que, em resumo, *é preciso multiplicar ambos os termos de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras.*

O mesmo raciocinio demonstra a regra para um numero qualquer de fracções.

Quanto ao processo baseado no m. m. c., generalisa-se com a mesma facilidade. Porque, determinado o menor multiplo commum a dois denominadores, para obter o menor multiplo commum a esse segundo denominador assim transformado e ao terceiro basta introduzir os factores novos deste ultimo.

Vê-se, assim, que *o menor multiplo commum se obtém formando o producto de todos os factores primos communs e differentes aos denominadores, dando a cada um daquelles factores o grão da potencia que elle tiver no denominador onde mais entrar.*

Formado esse menor multiplo, que é o denominador procurado, deve ser elle dividido por cada um dos denominadores dados. Esse quociente se obtém immediatamente tomando os factores primos que o menor multiplo contém depois da suppressão dos que são communs ao denominador considerado. Por esse quociente multiplica-se o numerador respectivo.

Consideremos, por exemplo, as fracções

$$\frac{5}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9} \text{ e } \frac{1}{10}.$$

Para tornal-as isomeras pelo 1° processo, multiplicaremos ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores das tres restantes, o que dá

$$\frac{5 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 9 \text{ vezes } 10}{6 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 9 \text{ vezes } 10}, \quad \frac{3 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 9 \text{ vezes } 10}{8 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 9 \text{ vezes } 10},$$

$$\frac{2 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 10}{9 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 10}, \quad \frac{1 \text{ vez } 6 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 9}{10 \text{ vezes } 6 \text{ vezes } 8 \text{ vezes } 9},$$

isto é, as fracções equivalentes $\frac{3600}{4320}$, $\frac{1620}{4320}$, $\frac{960}{4320}$ e $\frac{432}{4320}$.

Para chegar a similhante resultado pelo 2º processo, decompõem-se todos os denominadores em seus factores primos e forma-se o producto não só dos factores differentes, mas tambem dos communs que figuram nas mais altas potencias.

Este producto total será o da 3ª potencia de 2 pela 2ª potencia de 3 e por 5. Dividindo-o por cada um dos denominadores 2 vezes 3 ou 6, 2 vezes 2 vezes 2 ou 8, 3 vezes 3 ou 9 e 2 vezes 5 ou 10 e multiplicando cada um dos quocientes pelo numerador respectivo, obtem-se successivamente as fracções equivalentes e isomeras $\frac{300}{360}$, $\frac{135}{360}$, $\frac{80}{360}$ e $\frac{36}{360}$, que são evidentemente mais simples do que as fornecidas pelo processo precedente.

Si tivermos ainda as fracções taes como $\frac{1}{48}$, $\frac{5}{24}$ e $\frac{7}{6}$, em que o maior denominador 48 é um multiplo de todos os outros, e portanto o m. m. c. delles, tomaremos este numero para denominador commum. As fracções isomeras equivalentes serão, pois, $\frac{1}{48}$, $\frac{10}{48}$ e $\frac{56}{48}$ (25b).

Outro meio de obter o m. m. c. a mais de dois numeros. Este meio não é mais que uma extensão daquelle que foi exposto para o caso de dois numeros, empregando o seu m. d. c. Elle baseia-se na propriedade em virtude da qual « para obter o m. m. c. a muitos numeros, basta

(25b) Querendo simplesmente comparar a grandeza de diversas fracções, póde-se *reduzil-as ao mesmo numerador*, competindo o maior valor á que tiver então menor denominador. Para isto basta applicar aos numeradores qualquer dos dois processos acima : ou multiplicar os termos de cada uma pelo producto dos numeradores das outras, ou tomar o m. m. c. dos numeradores, dividil-os por cada um destes e multiplicar o quociente pelo denominador respectivo.

achar o m. m. c. entre o 1° e o 2°; depois o m. m. c. entre o resultado obtido e o 3°; e assim por diante, até ter considerado o ultimo dos numeros dados. O derradeiro menor multiplo commum então obtido será o dos numeros propostos.»

Para demonstrar esta propriedade, consideremos, por exemplo, tres numeros e supponhamos que se haja determinado o m. m. c. entre o 1° e 2°. Dizemos que o m. m. c. aos numeros propostos é igual ao que existe entre o m. m. c. obtido para os dois primeiros e o terceiro. Com effeito, todos os multiplos communs aos numeros propostos sendo divisiveis pelo 1° e pelo 2°, tambem o são pelo m. m. c. a estes dois numeros. Logo, todos os multiplos communs aos tres numeros dados são multiplos communs ao menor multiplo dos dois numeros e ao terceiro; e conseguintemente o m. m. c. aos tres numeros propostos é tambem igual ao m. m. c. que existe entre o m. m. c. dos dois primeiros e o terceiro.

Seria facil estender o mesmo raciocinio quando se tratasse de quatro, cinco, etc., numeros.

Isto posto, á medida que se fôr conhecendo o maior divisor commum dos numeros propostos, assim considerados dois a dois, é facil de vêr que se póde tambem determinar successivamente seu menor multiplo commum por meio do m. d. c. dos dois numeros considerados.

Seja, por exemplo, a determinar o menor multiplo dos numeros 4, 6, 24 e 9. O m. d. c. de 4 e 6 sendo 2, o seu m. m. c. será $\frac{4}{2}$ multiplicado por 6, isto é, 12; o m. d. c. de 12 e 24 sendo 12, o seu m. m. c. será $\frac{12}{12}$ multiplicado por 24, igual a 24; o m. d. c. de 24 e 9 sendo 3, o seu m. m. c. será $\frac{24}{3}$ multiplicado por 9, igual a 8 vezes 9 ou 72; assim, pois, 72 é o m. m. c. dos numeros dados.

Quando o menor dos numeros dados é divisor de todos os outros, obtém-se facilmente o m. m. c. a todos

multiplicando-o pelos quocientes resultantes das divisões destes por elle.

Assim, por ex., tem-se o m. m. c. a 48, 36 e 12, multiplicando successivamente este ultimo numero por 4 e por 3, quociente das divisões de 48 e 36 por elle. Porque 12, sendo o m. d. c. a todos (309), não fizemos mais do que dividir o primeiro pelo m. d. c. e multiplicar o quociente pelo outro, o que forneceu 144.

A não ser nesse caso excepcional similhante modo nunca é utilisado; porque a determinação do m. d. c. é tão trabalhosa como a do m. m. c., restando ainda fazer as divisões e multiplicações que importarão em accrescimo inutil de trabalho.

322.—EXAME COMPARATIVO DOS DOIS PROCESSOS PARA OBTER A ISOMERIA.—« Emquanto se trata de duas fracções, a facilidade do processo baseado no producto dos denominadores parece compensar a sobrecarga do denominador commum.

Mas, á medida que o numero das fracções augmenta, vai-se sentindo que a determinação da isomeria, baseada no menor multiplo commum dos denominadores, deve prevalecer sobre o processo baseado no producto dos mesmos denominadores.

Porque os embaraços preliminares relativos á determinação do m. m. c. são cada vez mais compensados pelas simplificações definitivas. »

§ x ς (26)

Extensão das operações fetichicas ás fracções

323.— CONCEPÇÃO DA ADDICÇÃO E DA SUBTRACÇÃO DAS FRACÇÕES.— Uma vez tornadas isomeras as fracções, a ex-

(26) Numero *eihõsi hai héks* (vinte e seis).

CARICIA

tensão da addicção e da subtracção a ellas nenhuma difficuldade offerece, pois que a noção torna-se tão clara como tratando-se dos numeros inteiros. Consideremos successivamente os dois casos.

Na addicção de duas fracções isomeras o problema se apresenta como consistindo em sommar dois numeros referidos a um mesmo módulo; apenas este módulo, em vez de ser a unidade convencionada para os numeros inteiros, é uma parte dessa unidade. Ora, essa circumstancia apenas indica a necessidade de especifical-a no resultado.

Assim, para sommar $\frac{3}{5}$ com $\frac{4}{5}$, é evidente que só temos que sommar os numeradores e dar ao resultado o mesmo denominador 5, o que produz $\frac{7}{5}$ porquanto $\frac{3}{5}$ de uma unidade mais $\frac{4}{5}$ da mesma unidade formam evidentemente $\frac{7}{5}$.

Portanto, si as fracções dadas para sommar não forem isomeras, cumpre tornal-as taes.

Isto feito, *sommam-se os numeradores como si se tratasse de numeros inteiros, tendo o cuidado de indicar a unidade, isto é, o denominador commum*. Dahi é facil de concluir a regra para sommar um inteiro com uma fracção ou viceversa.

Porque, para tornar o inteiro isomero com a fracção, basta multiplical-o pelo denominador e dar a esse producto o mesmo denominador.

Isto posto, só resta praticar a somma conforme foi indicado acima.

Tendo, por exemplo, de addiccionar 2 a $\frac{4}{5}$, substituimos 2 por 2 vezes $\frac{5}{5}$ ou $\frac{10}{5}$ e sommamos $\frac{10}{5}$ com $\frac{4}{5}$, o que produz $\frac{14}{5}$.

O exame do conjuncto do calculo conduz á regra: « multiplica-se o inteiro pelo denominador, somma-se o producto

com o numerador e dá-se ao resultado o mesmo denominador.»

No caso da subtracção é igualmente evidente que, tornadas isomeras as fracções, o sentido da operação é o mesmo que si se tratasse dos numeros inteiros. A unica differença é que o módulo tornou-se menor. Ora, isso não affecta a combinação numerica.

Portanto, para achar a differença de duas fracções isomeras « tira-se o numerador da fracção minuidora do numerador da fracção minuendo, e dá-se ao resultado o denominador commum.»

Assim, por exemplo, si de $\frac{7}{5}$ subtrahirmos $\frac{4}{5}$, o resultado será $\frac{3}{5}$, porque $\frac{7}{5}$ de uma unidade menos $\frac{4}{5}$ da mesma unidade é evidentemente igual a $\frac{3}{5}$ della.

E' claro que a operação não tem sentido si o numerador do minuendo fôr menor do que o do minuidor.

Si se tratar de tirar uma fracção de um inteiro é necessario tornar o inteiro isomero com a fracção, reduzindo-o assim á mesma unidade.

Para isto é preciso substituil-o por uma fracção tendo o mesmo denominador que a fracção minuidora, o que se obtém « multiplicando e dividindo o inteiro por esse denominador.»

Isso feito, applica-se a regra geral das fracções isomeras. Por exemplo, 2 menos $\frac{3}{5}$ é o mesmo que $\frac{10}{5}$ menos $\frac{3}{5}$, o que dá $\frac{7}{5}$.

O exame do conjuncto dos calculos conduz á regra : «multiplica-se o inteiro pelo denominador, tira-se do producto o numerador e dá-se ao resultado o mesmo denominador.»

Quanto á subtracção de um inteiro de uma fracção, não é operação que se apresente no ponto de vista arithmetico, a menos que a fracção não seja impropria, igual ou maior que o inteiro. A primeira condição descobre-se á simples inspecção.

Quanto á segunda, fica patente pela reducção do inteiro a uma fracção isomera com a fracção minuidora.

324. — A MULTIPLICAÇÃO NÃO PÓDE SER EXTENDIDA ÁS FRACÇÕES SEM MODIFICAR A NOÇÃO SURGIDA DA SOMMA. — Mas, o que acabamos de reconhecer quanto á extensão da addicção e da subtracção ás fracções, não é possivel com a mesma generalidade quando se trata da multiplicação, sem modificar a concepção desta.

Com effeito, segundo a sua filiação relativamente á addicção, a multiplicação attribue aos factores noções distinctas que não se prestam igualmente á transformação fraccionaria.

Assim, o multiplicando representando o valor de uma das parcellas, a sua significação é tão clara tratando-se de numeros inteiros como de fracções.

Por exemplo, 325 metros, repetido 46 vezes, é uma questão comprehensivel como $\frac{5}{21}$ do metro repetido seis vezes.

Vê-se, então, que a multiplicação de uma fracção por inteiro equivale a uma somma de fracções iguaes ao multiplicando.

No exemplo mencionado seria $\frac{5}{21}$ mais $\frac{5}{21}$ mais $\frac{5}{21}$ mais etc., o que daria uma fracção tendo para numerador o producto do numerador 5 pelo multiplicador 6 e para denominador o mesmo do multiplicador, obtendo-se portanto $\frac{30}{21}$.

Mas, o mesmo não se dá com o multiplicador, pois que, indicando o numero das parcellas, perde de sentido quando se suppõe fracção.

Para reconhecer o que póde significar a multiplicação no caso do multiplicador fracção, convém remontar á origem geometrica da multiplicação.

Vimos que a multiplicação podia ser considerada como a lei entre a área de um rectangulo e os seus lados.

A área é o producto de que os lados são os factores. Essa interpretação é intuitiva quando ambos os lados são representados por numeros inteiros ou quando só um delles é representado por fracção.

Em ambas essas hypotheses o numero de quadrados modulares ou de partes do quadrado modular contidos na superficie do rectangulo é expresso pelo producto dos numeros que representam os dois lados.

Examinemos, pois, qual a modificação que é necessaria na concepção da multiplicação quando ambos os factores são fracções.

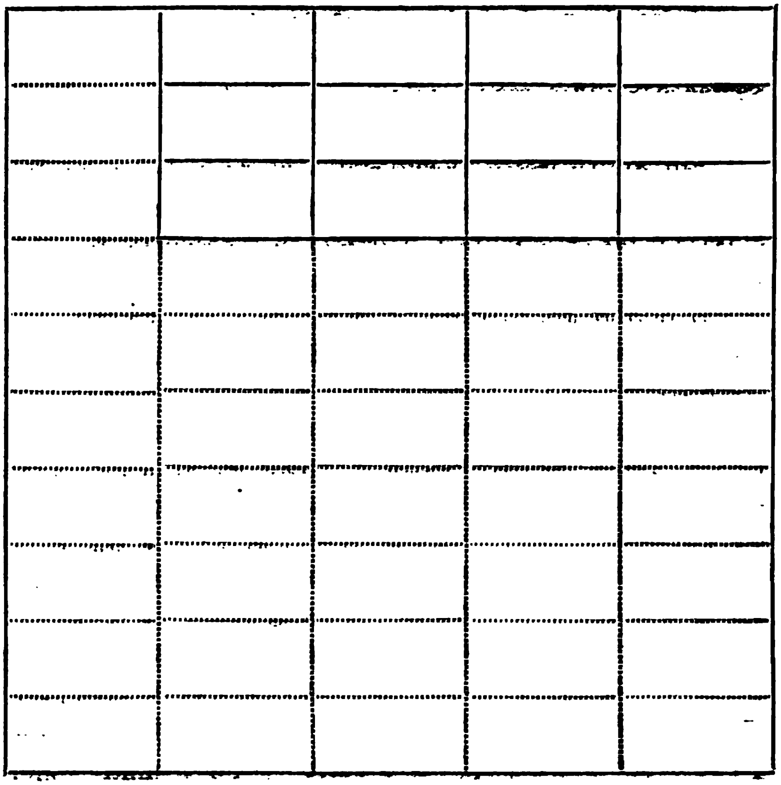
Note-se que este caso póde ser considerado como o geral, por isso que os numeros inteiros podem tomar a fórma de fracção. Mas, para que o nosso exame seja racionalmente feito, convém observar que a concepção geral a que chegarmos deve conter como caso particular a noção da multiplicação, conforme a arithmetica a fez surgir.

325. — REFLEXÕES SOBRE O MODO DE CONCEBER A MULTIPLICAÇÃO NO CASO EM QUE O MULTIPLICADOR É FRACÇÃO. — Isto posto, supponhamos que se tem um rectangulo em que um dos lados é $\frac{3}{10}$ e o outro $\frac{4}{5}$, e vejamos como a área depende da combinação desses dois numeros.

O lado $\frac{3}{10}$ decompondo-se em 3 partes iguaes a $\frac{1}{10}$ do módulo e o lado $\frac{4}{5}$ decompondo-se em 4 partes iguaes a $\frac{1}{5}$ do mesmo módulo, a área do rectangulo ficará decomposta em 3 vezes 4 rectangulos iguaes entre si.

Resta, pois, saber o que representa cada um desses rectangulos em relação ao quadrado modular.

Ora, essa relação se manifesta prolongando os lados do rectangulo que se quer medir de modo a formar o quadrado modular, como se vê na figura seguinte :



Porque, então, vê-se que um dos lados desse quadrado se decomporá em 10 partes iguaes a $\frac{1}{10}$ do módulo e o outro contiguo, em 5 partes iguaes a $\frac{1}{5}$ do mesmo módulo.

E, portanto, a área do quadrado modular ficará decomposta em 10 vezes 5 rectangulos iguaes entre si e iguaes aos rectangulos em que se fragmentou o que se queria medir. Donde, cada um desses rectangulos fragmentarios será $\frac{1}{10 \text{ vezes } 5}$ do quadrado modular; e, por conseguinte, o rectangulo que se quer avaliar será expresso pela fracção $\frac{3 \text{ vezes } 4}{10 \text{ vezes } 5}$.

Assim, para avaliar a área de um rectangulo cujos lados são expressos por fracções, *multiplicam-se os numeradores e denominadores entre si.*

Nós suppuzemos que as fracções eram proprias; mas, é facil de estender o mesmo raciocinio ao caso em que as fracções são impróprias.

Sob essa primeira fórma, a concepção da multiplicação das fracções não nos indica qual a modificação a introduzir na concepção primitiva para generalisal-a até o caso do multiplicador fraccionario; porém ella prepara essa generalisação.

Com effeito, na concepção primitiva, o multiplicando inteiro, ao mesmo tempo que representa um dos lados, representa tambem o numero de quadrados modulares justapostos a esse lado, em uma palavra, representa uma área.

Ora, o exame da nossa figura nos mostra que, abstrahindo do multiplicador, o multiplicando fraccionario, ao mesmo tempo que representa um lado, representa tambem um certo numero de rectangulos iguaes, tendo um dos lados igual a uma das partes desse multiplicando e o outro igual ao lado do quadrado modular.

Assim, no nosso exemplo, $\frac{3}{10}$ representa as partes do módulo linear que se contém no multiplicando; mas, representa ao mesmo tempo 3 rectangulos iguaes tendo cada um um lado igual a $\frac{1}{10}$ do módulo linear. O quadrado modular contendo 10 desses rectangulos, cada um delles será $\frac{1}{10}$ do quadrado modular, e o multiplicando $\frac{3}{10}$ vem indicar, pois, uma área igual a $\frac{3}{10}$ do quadrado modular.

Assim, em resumo, quando o multiplicando é numero inteiro, indica quantos quadrados modulares se acham justapostos a si e quando o multiplicando é fracção indica quantas partes do quadrado modular se acham justapostas a si.

Mas, o conjuncto desses rectangulos indicados pelo multiplicando, quando se abstrahe do multiplicador, repre-

senta uma fracção do quadrado modular, que não póde ser igual ao rectangulo que se quer avaliar sinão quando o multiplicador é igual á unidade.

Em qualquer outra hypothese, a área do rectangulo que se quer avaliar será maior ou menor do que essa fracção, conforme o multiplicador fôr uma fracção impropria ou propria.

Para fixar as idéas, supponhamos que esse multiplicador é uma fracção propria, conforme o nosso exemplo primitivo.

A área do rectangulo que se quer avaliar será, pois, uma parte da fracção do quadrado modular representada pelo multiplicando. Ora, para saber o valor dessa parte, basta considerar agora que a fracção multiplicadora, ao mesmo tempo que indica um lado do rectangulo, fornece uma decomposição da fracção multiplicando em tantas partes iguaes quantas são as indicadas pelo seu denominador.

Assim, no nosso exemplo, o multiplicador $\frac{4}{5}$ fornece a decomposição do multiplicando em 5 rectangulos iguaes. Cada um desses rectangulos será, pois, $\frac{1}{5}$ do multiplicando; e, como a área do rectangulo que se quer avaliar contém 4 delles, segue-se que essa área será representada por $\frac{4}{5}$ do multiplicando.

O conjuncto destas considerações nos mostra, pois, que, quando o multiplicador é fraccionario, elle deve ser considerado como indicando *quantas partes se deve tomar do multiplicando para ter o producto*. Isto é, o multiplicador exprime, então, ao mesmo tempo que um lado, a relação da área producto para a área multiplicando.

326. — Identificação da concepção primitiva com esta. — Desde então, é facil de reconhecer que o caso em que o multiplicador é numero inteiro entra no que acabamos de examinar.

Com effeito, elle corresponde á hypothese em que o conjuncto das partes a tomar do multiplicando equivale a um certo numero de vezes o mesmo multiplicando.

Nesta hypothese, o producto em vez de representar uma área menor que o multiplicando, corresponderá a uma área maior.

Mas, essa noção de *valor* fica subordinada á concepção da *relação*. De sorte que o producto, da mesma maneira que o quociente, perde qualquer noção absoluta de valor e passa a designar simplesmente uma combinação numerica.

Com effeito, seguida pelo exame do caso geometrico, tal combinação póde ser concebida abstrahindo da significação concreta dos numeros. Assim, em relação a duas fracções quaesquer, póde-se conceber directamente a *operação que tem por fim tomar de uma as partes da unidade indicadas pela outra*.

Essa consideração abstracta faz recahir na concepção primitiva o caso em que a fracção multiplicadora equivale a um numero inteiro. Porque, neste caso, o producto se fórma tomando tantas vezes todo o multiplicando quantas são indicadas pelo multiplicador.

De sorte que, dando toda a generalidade de que é susceptivel a multiplicação, póde-se dizer que o producto se fórma do multiplicando como o multiplicador se fórma da unidade.

O unico esforço que exige tal generalisação consiste, pois, em afastar como accessoria a idéa de accrescimo, que a principio se liga á palavra *multiplicar*, o augmento e a diminuição podendo ambos ter lugar, conforme os casos, sem que a combinação mude. Si o multiplicador fôr igual a um certo numero de vezes a unidade, o producto será igual a um certo numero de vezes o multiplicando; si fôr igual a um certo numero de partes da unidade, o producto será igual a um certo numero de partes do multiplicando.

Mas, num caso como no outro, a combinação é a mesma e deve ser concebida independentemente do valor dos resultados a que conduz.

330. — CONCEPÇÃO IMMEDIATA DA MULTIPLICAÇÃO EM TODA A SUA GENERALIDADE, QUANDO SE A CONSIDERA COMO O INVERSO DA DIVISÃO. — Todas essas difficuldades ficarão evitadas subordinando á divisão a concepção primitiva da multiplicação, em vez de tiral-a da addicção.

Com effeito, segundo a definição geral do *quociente* como exprimindo quantas partes do divisor se contêm no dividendo, a sua noção se applica ás fracções, tão normalmente como aos numeros inteiros. De sorte que a difficuldade de determinar o quociente, no caso fraccionario, apenas affecta a sua *avaliação*, mas de fórma alguma a sua *concepção*.

Isto posto, si estudarmos a multiplicação como o inverso da divisão, ella póde ser immediatamente concebida em relação a um caso qualquer. Então, a sua definição consiste em *achar um numero cuja relação com um dos factores dados seja igual ao outro*.

Donde resulta que, tomando o caso geral em que os factores são representados por fracções, o problema da multiplicação consistiria em determinar um numero cuja relação com uma das fracções fosse igual á outra.

Ora, si a relação do producto para um dos factores fosse igual a uma certa fracção, isto mostraria que esse producto se obteria tomando desse factor as partes indicadas pelo outro.

Por exemplo, supponhamos que se trata de achar o numero cuja relação com $\frac{6}{16}$ é igual a $\frac{5}{12}$. Si a relação do numero incognito para o conhecido é $\frac{5}{12}$, segue-se que o numero incognito é $\frac{5}{12}$ do conhecido, pois que a relação indica quantas partes do *consequente* constituem o *antecedente*.

Tudo se reduz, pois, a tomar $\frac{5}{12}$ do outro factor. Para conseguil-o seria necessario tomar $\frac{1}{12}$ do multiplicando e depois repetir esse resultado 5 vezes.

Ora, si o multiplicando fôr numero inteiro, o seu $\frac{1}{12}$ será representado por uma fracção que terá por numerador o multiplicando e por denominador 12. E a determinação do producto consistirá em achar uma somma de parcellas iguaes ao numerador.

E si o multiplicando fôr uma fracção, o seu $\frac{1}{12}$ se obtém ou dividindo o numerador por 12, o que só excepcionalmente será possivel, ou tornando o seu denominador 12 vezes maior, o que é sempre realisavel. Nesse caso, para determinar o $\frac{1}{12}$ do multiplicando, teremos de achar uma somma de parcellas iguaes ao denominador. E, obtido esse resultado, teriamos de achar uma somma de parcellas iguaes ao numerador.

De sorte que a avaliação de todos os productos recahiria no caso em que ambos os factores são numeros inteiros, isto é, no caso que faz depender a multiplicação da addicção.

331.—INSTITUIÇÃO DA REGRA GERAL DA AVALIAÇÃO. — Uma vez estabelecida a concepção geral da multiplicação, a avaliação correspondente cessa de offerecer a minima difficuldade. Vê-se logo que a operação é independente da isomeria, que em nada a facilitaria e poderia complical-a si se procurasse empiricamente instituil-a, por ser um calculo ocioso.

Isto resulta do facto do multiplicador fraccionario representar propriamente para o calculo, não um lado do rectangulo, mas a relação da área producto para a área multiplicando. Da definição resulta logo que para multiplicar duas fracções *multiplicam-se os numeradores e os denominadores entre si.*

Assim, o producto de $\frac{6}{16}$ por $\frac{5}{12}$ é $\frac{30}{192}$.

Com effeito, o multiplicador sendo $\frac{5}{12}$ da unidade, o producto será igual a $\frac{5}{12}$ do multiplicando. Ora, para

chegar a este resultado bastará evidentemente tomar $\frac{1}{12}$ do multiplicando, isto é, tornal-o 12 vezes menor, o que conseguiremos multiplicando o seu denominador por 12; e em seguida repetir o resultado obtido 5 vezes ou tornal-o 5 vezes maior, o que conseguiremos multiplicando o seu numerador por 5.

Si o multiplicador fôr inteiro, o producto se obterá multiplicando por elle o numerador da fracção que serve de multiplicando e dando ao resultado o denominador desta.

Por exemplo, o producto de $\frac{6}{16}$ por 5 é $\frac{30}{16}$.

Com effeito, o multiplicador sendo igual a 5 vezes a unidade, o producto será igual a 5 vezes o multiplicando. Para obtel-o bastará, pois, tornar 5 vezes maior o mesmo multiplicando, o que se consegue multiplicando por 5 o seu numerador.

Si o multiplicador fôr fracção e o multiplicando inteiro, a definição geral mostra que convém seguir uma regra identica que vem estender a este caso o principio da *constancia de um producto cujos factores mudam de ordem*.

Aliás, o raciocinio normalmente indicado no estudo da multiplicação dos numeros inteiros se estende a este caso.

332.—APRECIAÇÃO PHILOSOPHICA DESTA ELABORAÇÃO.— Ella mostra que as principaes difficuldades do calculo arithmetico são mais philosophicas do que scientificas.

Apreciadas convenientemente, ellas resultam de uma insufficiente comparação do *calculo dos valores com o das relações*.

Deve-se sempre estabelecer entre esses dois pontos de vista uma harmonia que, sem confundil-os, os faça normalmente concorrer para a elaboração mathematica. Todos os embaraços ordinariamente accumulados no estudo das fracções resultam da disposição empirica de se

preoccupar com as avaliações, antes de haver instituido convenientemente as combinações respectivas. Ora, cumpre reconhecer que a harmonia normal dessas duas considerações acha-se necessariamente ligada ao accôrdo entre o *abstracto* e o *concreto*, para que a philosophia mathematica se ache directamente subordinada á systematisação geral.

Foi, com effeito, considerando em primeiro lugar os numeros como servindo para *medir*, que sentimos a necessidade de considerar o caso do multiplicador fraccionario. Esse destino é que liga a mathematica ao conjuncto da Philosophia Segunda.

Foi, em segundo lugar, remontando á significação concreta da multiplicação, que instituimos a sua concepção geral, considerando o caso do multiplicador fraccionario. (26a).

§ κ ζ' (27)

Extensão da divisão ás fracções

333. — SOBRE A CONCEPÇÃO DIRECTA DA DIVISÃO DAS FRACÇÕES. — Para conceber a divisão das fracções, examinemos a significação concreta que ella póde ter em relação aos tres problemas que, como vimos, deram origem a tal operação.

Comecemos, porém, por considerar desses problemas aquelle que mais directamente fornece a concepção geral da divisão. Então a operação consiste em determinar a relação entre duas grandezas, isto é, em determinar quantas partes do divisor se contém no dividendo. Nesta hypothese, a noção da divisão é tão clara e tão directa quando os numeros compa-

(26a) Das notas do Curso do Cidadão R. T. Mendes.

(27) Numero *eikõssi kai héptá* (vinte e sete).

rados são fracções, como quando são inteiros, pois que o problema geral de saber quantas partes de uma grandeza se contém em outra não póde alterar sua significação segundo a maneira pela qual essas grandezas forem representadas.

A instituição, porém, da fracção que exprime o *quociente* é que não se offerece como igualmente facil em todos os casos, pois que no caso das fracções é preciso attender simultaneamente ao numerador e ao denominador, de cujo concurso depende o valor de cada um dos termos da divisão.

De sorte que se tem então de comparar quatro numeros ao mesmo tempo, ao passo que, quando se trata de inteiros, só se tem de considerar um numero para representação de cada uma das grandezas combinadas, e, portanto, a operação só exige a comparação de dois numeros.

334. — UTILIDADE DA ISOMERIA PARA DISSIPAR OS EMBARAÇOS DA AVALIAÇÃO DO QUOCIENTE. — Mas, o confronto dos casos da divisão evidencia logo que as difficuldades, em um caso, e as facilidades, no outro, resultam unicamente do facto de serem os numeros inteiros espontaneamente referidos á mesma unidade.

Porque, quando as fracções são isomeras, a sua relação se apresenta espontaneamente como sendo expressa pelo quociente dos numeradores.

335. — PROVEITO DESTA OBSERVAÇÃO PARA A INSTITUIÇÃO DO QUOCIENTE. — Desde então, seremos levados, para avaliar o quociente de duas fracções, a tornal-as isomeras, o que póde ser conseguido por qualquer dos dois modos geraes acima apontados.

Proponhamo-nos, por ex., dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{14}$.

Os denominadores não admittindo nenhum factor commum, o modo baseado na decomposição dos denominadores em seus factores primos não é aqui o mais simples.

Applicando, pois, o modo que se funda em tomar para novo denominador o producto dos denominadores primitivos, chega-se ás fracções $\frac{2 \text{ vezes } 14}{3 \text{ vezes } 14}$ e $\frac{5 \text{ vezes } 3}{3 \text{ vezes } 14}$; e para effectuar a divisão só nos resta dividir os numeradores destas duas fracções, o que nos dá $\frac{2 \text{ vezes } 14}{5 \text{ vezes } 3}$.

Reconhece-se, assim, que o conjuncto da operação reduz-se a *multiplicar a fracção dividendo pela fracção divisora invertida.*

Quando, ao envez de uma fracção por outra, tivermos de dividir um inteiro por uma fracção, a questão reduz-se ao caso precedente.

Bastará, com effeito, substituir esse inteiro por uma outra fracção, isomera com a proposta. Desde então, dividindo os dois numeradores, o conjuncto da operação nos leva a reconhecer que é preciso *multiplicar o inteiro pela fracção divisora invertida.*

Assim, para dividir 2 por $\frac{5}{6}$, substituindo 2 por $\frac{2 \text{ vezes } 6}{6}$ seremos levados a dividir 2 vezes 6 por 5, o que dá $\frac{2 \text{ vezes } 6}{5}$ ou $\frac{12}{5}$.

Si, ao contrario, tivermos de dividir uma fracção por um inteiro, substituindo este por uma outra fracção isomera com a proposta, a questão recahe ainda no caso geral, mesmo porque póde-se considerar o inteiro como uma fracção cujo denominador é 1.

Mas, o conjuncto do calculo nos mostra aqui que basta *multiplicar o denominador da fracção pelo inteiro, conservando o respectivo numerador.*

Assim, para dividir $\frac{2}{3}$ por 5, substituindo este numero por $\frac{5 \text{ vezes } 3}{3}$ e tomando a relação entre os numeradores, obtém-se $\frac{2}{5 \text{ vezes } 3}$.

336. — EXPLICAÇÃO DA REGRA DA DIVISÃO DAS FRACÇÕES CONSIDERANDO A DIVISÃO COMO O INVERSO DA MULTI-

PLICAÇÃO. — Consideremos agora a divisão como inversa da multiplicação. Concretamente o problema corresponde então a determinar um dos lados de um rectangulo, quando se conhecem a área e o outro lado.

Vê-se, por ahi, que elle abrange duas questões distinctas, conforme o modo pelo qual se encara o factor conhecido, e, portanto, o factor incognito.

Assim, si o factor dado fôr supposto designar o multiplicador, elle representará a *relação* do producto para a área designada pelo multiplicando incognito. (Não se deve esquecer que o multiplicando indica ao mesmo tempo um lado do rectangulo e um rectangulo que tem para lado esse multiplicando e o módulo). Isto é, o factor conhecido indica quantas partes do quociente formam o producto.

Logo, para obter o quociente, basta tomar do producto as partes indicadas pela fracção divisora invertida.

Tomemos um exemplo, para fixar as idéas.

Seja a fracção $\frac{2}{3}$ a dividir por $\frac{5}{6}$; admitta-se que $\frac{2}{3}$ indica o producto $\frac{5}{6}$ pelo quociente, isto é, que $\frac{2}{3}$ seja igual a $\frac{5}{6}$ do quociente. Segue-se que $\frac{1}{6}$ do quociente será $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3}$; e para ter esse $\frac{1}{5}$ basta multiplicar o denominador de $\frac{2}{3}$ por 5, que é o numerador do divisor.

Isto posto, tendo $\frac{1}{6}$ do quociente, para ter o quociente total cumpre repetir esse $\frac{1}{6}$ 6 vezes, isto é, multiplicar por 6 o numerador da fracção obtida.

Recapitulando-se o conjuncto das operações effectuadas, vê-se que se chegou á mesma regra: multiplicar a fracção dividendo pela fracção divisora invertida.

Em resumo, vemos que o producto se fórma do multiplicando como o multiplicador se fórma da unidade. Considerando, pois, o divisor como o multiplicador, podemos

dizer que o dividendo se fórma do quociente do mesmo modo que o divisor se fórma da unidade.

Para fixar as idéas supponhamos ainda, por ex., que se trata de dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

O divisor sendo igual a 4 vezes $\frac{1}{5}$ da unidade, o dividendo se comporá de 4 vezes $\frac{1}{5}$ do quociente; portanto, para obter $\frac{1}{5}$ do quociente bastará tornar o dividendo 4 vezes menor, o que se consegue multiplicando por 4 o seu denominador, o que produz $\frac{2}{3 \text{ por } 4}$.

Tendo assim obtido $\frac{1}{5}$ do quociente, é evidente que para ter os $\frac{5}{5}$, isto é, todo o quociente, bastará tornar aquelle resultado 5 vezes maior, o que se consegue multiplicando por 5 o seu numerador; de sorte que $\frac{2 \text{ por } 5}{3 \text{ por } 4}$ é o quociente procurado.

Si o dividendo fôr numero inteiro, 2, por ex., raciocinaremos do mesmo modo.

Com effeito, o divisor sendo ainda $\frac{4}{5}$ da unidade, o dividendo, 2, conterá 4 vezes $\frac{1}{5}$ do quociente. Logo, tornando-o 4 vezes menor, isto é, dividindo-o por 4, obteremos $\frac{2}{4}$ para valor de $\frac{1}{5}$ do quociente. Por conseguinte, para ter todo o quociente, isto é, os $\frac{5}{5}$ delle bastará tornar $\frac{2}{4}$ cinco vezes maior, o que se consegue multiplicando por 5 o seu numerador; de sorte que $\frac{2 \text{ por } 5}{4}$ é o quociente procurado.

Emfim, supponhamos que o divisor seja inteiro e tenhamos de dividir, por ex., $\frac{2}{3}$ por 4. O divisor sendo igual a 4 vezes a unidade, o dividendo $\frac{2}{3}$ é igual a 4 vezes o quociente. Logo, para ter este quociente, bastará tornar o dividendo 4 vezes menor, o que se consegue multiplicando por 4 o seu denominador. O quociente é, pois, $\frac{2}{3 \text{ vezes } 4}$ ou $\frac{2}{12}$.

Mas, a consideração de que a ordem dos factores não altera o producto mostra que as duas questões podem entrar uma na outra, á vontade. De sorte que nos é facultativo considerar sempre o factor conhecido como multiplicador ou como multiplicando, sem que o *valor abstracto* do quociente mude por isso

Quanto á sua significação concreta, o problema que se tiver de resolver na occasião a indicará.

Portanto, considerando a divisão como o inverso da multiplicação, chegamos á mesma regra arithmetica para a avaliação do quociente, *quer se considere este como devendo exprimir o numero do qual se tem de tomar as partes indicadas pelo divisor para ter o dividendo*, quer se considere o quociente como exprimindo o numero que indica as partes que se tem de tomar do divisor para ter o dividendo.

A regra, porém, é instituida immediatamente na primeira hypothese, ao passo que na segunda elle exige o estabelecimento preliminar da isomeria.

340. — REDUCÇÃO DA REGRA DA MULTIPLICAÇÃO DAS FRACÇÕES Á REGRA DA DIVISÃO. — Acabamos de constatar que no problema da multiplicação um dos factores póde sempre ser considerado como exprimindo a relação do producto para o outro. Vê-se, pois, que toda a multiplicação póde ser considerada como correspondendo ao problema inverso da divisão, directamente instituida.

Porque, a avaliação do producto importa, á vista disso, em determinar um numero cuja relação com um outro é conhecida, quando esse outro é tambem conhecido.

Isto posto, é facil de reconhecer que a regra da multiplicação das fracções póde entrar na divisão.

Tomemos um exemplo para maior clareza. Seja achar o producto de $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{6}$. Admitta-se que o factor $\frac{3}{4}$ indica a relação do producto para o multiplicando $\frac{5}{6}$.

Isto quer dizer que, suppondo o producto dividido em 3 partes iguaes, o multiplicando contém 4 destas partes.

Por outra, dividindo o producto em 3 partes iguaes e o multiplicando em 4, cada parte do producto será igual a uma das partes do multiplicando.

Por ahi se vê immediatamente que si a razão do producto para o multiplicando é $\frac{3}{4}$, a razão do multiplicando para o producto é $\frac{4}{3}$. Isto é, o multiplicando se obteria tomando $\frac{4}{3}$ do producto.

Donde se deprehende (em virtude da definição geral da multiplicação) que o multiplicando póde ser considerado como um producto cujos factores são: a fracção inversa do multiplicador e o producto incognito E desde então esse producto incognito será obtido *dividindo o multiplicando pela fracção inversa do multiplicador*. De tudo quanto precede resulta que o problema—*dada a relação entre dois numeros e um delles achar o outro*—encerra duas questões, conforme o numero conhecido é o consequente ou o antecedente na comparação effectuada.

Si o *consequente* fôr conhecido, a solução do problema depende da multiplicação. Si o *antecedente* fôr conhecido, o problema depende da divisão.

341.— A DIVISÃO DAS FRACÇÕES CONSIDERADA COMO PODENDO CORRESPONDER Á DIVISÃO DE UMA GRANDEZA EM UM CERTO NUMERO DE PARTES IGUAES.— Considerando finalmente o problema da divisão de um numero em partas iguaes, reconhece-se que por sua natureza o divisor é sempre um numero inteiro.

A divisão das fracções, quando o divisor fôr uma fracção, só poderá, pois, corresponder a tal problema si esse divisor fôr susceptivel de tornar-se um numero inteiro.

Para apanhar neste caso a harmonia entre o abstracto e o concreto, consideremos um exemplo: Trata-se de dividir um numero em cinco partes iguaes.

Supponhamos que 5 é transformado na fracção que tem para denominador 3; 5 se tornará então $\frac{15}{3}$. Para descobrir o que significa, neste caso, a substituição do divisor 5 pelo divisor $\frac{15}{3}$, note-se que $\frac{15}{3}$ equivale a 5, porque cada parte de 5 vale 3 da grandeza dividida em $\frac{15}{3}$, isto é, para dividir em $\frac{15}{3}$ uma grandeza que se acha dividida em 5 partes, basta dividir cada $\frac{1}{5}$, em 3 partes iguaes.

Portanto, em vez de dividir em 5 partes iguaes, podemos dividir em 15 partes iguaes; mas, seria preciso tomar então 3 dessas partes.

Reconhece-se, assim, que, quando o problema de dividir uma grandeza em partes iguaes se apresenta com o divisor sob fórma de fracção, o quociente se obtém ainda *multiplicando o dividendo pela fracção divisora invertida.*

342.— **Resumindo** o que acaba de ser dito, vê-se que todo o calculo fraccionario entra sempre no calculo dos numeros inteiros. Mas, essa reducção não se faz com a mesma espontaneidade em relação a todas as operações.

Com effeito, considerada sob esse aspecto, a divisão se approxima da addicção e da subtracção como exigindo a mesma preparação que ellas.

A multiplicação, porém, se afasta das tres como dispensando tal preambulo e requerendo uma refusão de sua concepção inicial, como derivada da addicção.

Finalmente, o conjuncto de nossa apreciação demonstra as affinidades entre a divisão e a multiplicação, por tal modo approximadas no calculo theocratico, que as duas comportam uma regra commum tirada de qualquer dellas.

Tem-se assim um novo exemplo da aptidão da razão abstracta para ligar as concepções surgidas separadamente do dominio concreto.

Todas essas ponderações contribuem para ligar indissoluvelmente, mas sem a minima confusão, as diversas operações fundamentaes.

Para que esse calculo preliminar satisfaça ao conjuncto das necessidades praticas, só nos resta examinar as simplificações de que é susceptivel o calculo fundamental, mediante a adopção systematica das potencias da base numeral para denominador.

Tal será o objecto do capitulo seguinte. (27a).

(27a) Notas do curso do cidadão R. T. Mendes.

CAPITULO X

Aperfeiçoamento monotheico do calculo fraccionario em consequencia do ascendente da actividade industrial. (Simplificação da avaliação fraccionaria em consequencia da adopção systematica das potencias da base numeral como taxa de subdivisão)

§ $\kappa\eta'$ (28)

Instituição philosophica desta questão

343. — MOTIVOS QUE CONDUZIRAM AO CALCULO DAS FRACÇÕES BASICAS. — Do conjuncto do estudo até hoje feito do Calculo Arithmetico sobresahe o espirito geral de similhante calculo, como consistindo em simplificar tanto quanto possivel as avaliações quaesquer. Similhante espirito não é sinão a applicação da lei mãe de Philosophia Primeira, (28a) ao dominio mais elementar da Logica ou Mathematica, isto é, da Philosophia Segunda.

A' vista de tal consideração, a nossa apreciação do calculo fraccionario seria incompleta si, depois de haver instituido a reducção geral de tal calculo ao dos numeros inteiros, não examinassemos as simplificações que essa reducção comporta.

Mas, para que similhante exame seja completo, é necessario combinar o ponto de vista theorico com o ponto de vista pratico, a razão *abstracta* com a razão *concreta*; que

---

(28) Numero *eikôssi hai októ* (vinte e oito)

(28a) 1ª lei de Philosophia Primeira.

o estabeleçamos, harmonisando a sciencia espiritual com a sabedoria temporal.

Ora, examinado directamente, o calculo fraccionario se offerece como susceptivel de duas classes de simplificações. Umas, mais objectivas, resultam da propria natureza das fracções e provêm de se acharem ellas expressas pelos menores numeros que a relação comporta. Outras, mais subjectivas, dependem da representação que os numeros têm, em virtude do systema de numeração adoptado.

As primeiras já foram examinadas e constituiram o objecto da *theoria da simplificação das fracções*, naturalmente applicavel a todas as fracções.

Só nos falta, pois, considerar as segundas, que, em si mesmas, não podem concernir senão a fracções particulares. Mas, desde então, a sua consideração faz surgir o problema de reduzir todas as fracções a essas fracções excepcionaes.

Examinar, pois, quaes são as fracções que conduzem aos mais faceis calculos, não pela sua natureza, mas em consequencia do systema de numeração adoptado, e indagar os meios de reduzir o calculo das demais fracções a estas, tal deve ser, em summa, o objecto do complemento exigido pela instituição philosophica da theoria fraccionaria.

344. — EXAME DO ADVENTO HISTORICO DO PROBLEMA E DE SUA SOLUÇÃO. — A' vista das considerações precedentes, vê-se que similhante problema só podia impor-se á attenção theorica quando as necessidades praticas o exigissem

Ligada immediatamente á concepção fraccionaria, a doutrina da simplificação não podia deixar de ser elaborada, desde que tal concepção surgisse.

De outra maneira não se podia adquirir uma noção precisa da relação geometrica.

Mas, a consideração systematica das facilidades de um calculo, por sua natureza excepcional, não se impõe senão quando a preoccupação das avaliações effectivas prevalece.

Ora, essa preoccupação estava ligada ao surto do regimen industrial.

Até então as grandes avaliações concerniam á Astronomia; a adopção da numeração sexagesimal satisfazia as exigencias historicas.

Mas, desde que a actividade collectiva volta-se particularmente para o aperfeiçoamento de nossa situação planetaria, desde que a preponderancia dos habitos pacificos determina o surto das relações commerciaes, o uso de grandes calculos vai se generalisando.

Surge, por conseguinte, o problema de effectuar cada vez mais simplesmente e mais rapidamente, portanto, as avaliações determinadas pelas industrias e transacções.

Por outro lado, ao mesmo tempo que a actividade pratica impulsionada pela sociabilidade põe assim o problema da maxima simplificação do calculo fraccionario, ella indica tambem as condições de sua solução. Porque o destino pratico faz prevalecer o ponto de vista *relativo* nas avaliações; ou melhor, torna systematico, isto é, voluntario, o *relativismo* que a instituição da divisão já havia provocado.

Com effeito, no ponto de vista pratico, nós não podemos conseguir, nem precisamos de avaliação alguma absoluta.

As nossas acções e as nossas previsões sendo limitadas pelas nossas imperfeições inevitaveis e pelas difficuldades insuperaveis da ordem exterior, a Humanidade não precisa por toda a parte senão de approximações da realidade.

O unico ideal que podemos e precisamos aspirar é que as nossas approximações sejam susceptiveis de adquirir o grão que em cada caso fôr requerido pelo conjuncto das necessidades sociaes e moraes. Concebe-se, desde então, toda a importancia que póde adquirir uma simplificação, a principio extremamente excepcional, portanto pouco *utilisavel*. Introduzindo a preponderancia do ponto de vista subjectivo, essa simplificação póde generalisar-se, identifi-

cando com esse caso todos os outros, tanto quanto o conjuncto dos interesses humanos o exigir.

Percebe-se, pois, que a simplificação do calculo fraccionario, que temos hoje de considerar, devia ser retardada até que a evolução da Humanidade attingisse ao periodo francamente industrial. Isto só realisou-se no fim da idade média, de sorte que o surto de tal calculo devia ser um dos caracteres do primeiro seculo da idade moderna.

345. — SYSTEMATISAÇÃO DA EVOLUÇÃO QUE CONDUZIU AO CALCULO DAS FRACÇÕES BASICAS. — Estas reflexões explicam a importancia que, desde então, adquiriu a simplificação artificial do calculo fraccionario e que não se póde justificar quando se aprecia a questão sob o simples aspecto theorico.

A falta de um ponto de vista philosophico adequado levou até a exagerar tal simplificação arithmeticamente apreciada. Mas a mesma lacuna não permittiu medir todo o alcance social e moral dessa resolução theorica. De sorte que ella não poude ser convenientemente julgada antes de A. Comte.

Para apreciar todo o alcance do passo, então realisado pela Humanidade, basta desenvolver as reflexões precedentes. Com effeito, ellas nos mostram que, sejam quaes forem os fructos industriaes da theoria que estamos considerando, os ensinamentos moraes e logicos que ella encerra são de muito maior valor, pois que esse caso constitue no mais simples dominio theorico a manifestação decisiva dos verdadeiros caracteres geraes do espirito positivo.

Vê-se assim que a evolução humana fez cada vez prevalecer mais o ponto de vista subjectivo, mesmo na constituição theorica.

Entretanto um tal accrescimo de subjectivismo se concilia com uma apreciação mais profunda da *realidade*, mediante o ascendente da realidade suprema, isto é, o *relativismo* de nossas concepções e de nossas acções. Tanto

umas como outras não comportam outro criterio senão a utilidade da Humanidade, que não póde ser julgada definitivamente senão fazendo prevalecer o altruismo sobre o egoismo.

Para bem avaliar os fundamentos de taes reflexões, cumpre notar que o ascendente do subjectivismo não se faz sentir sómente na substituição voluntaria dos calculos approximados aos exactos possiveis. Elle se pronuncia sobretudo na supremacia, que assim adquire uma consideração especial e excepcional sobre o conjuncto do calculo fraccionario.

Isto nos revela desde o inicio da Logica um dos caracteres mais admiraveis da sabedoria da Humanidade, pois que veremos esta utilisando-se, por toda a parte, dos expedientes mais restrictos para satisfazer as suas mais vastas necessidades.

Devemos, finalmente, ponderar que, desde que a simplificação normal do calculo fraccionario depende da relação existente entre a representação da fracção e o systema de numeração empregado, essa simplificação é affectada pelas propriedades da base numeral adoptada.

Portanto, não era possivel que a theoria de que se trata adquirisse a sua constituição definitiva antes da regeneração positiva dos estudos theoricos.

346.—ABERRAÇÕES DEVIDAS AO ACADEMICISMO.—Todas essas reflexões tornam patente que o calculo das fracções basicas devia ter ficado exposto a varias aberrações durante o regimen academico. Como em qualquer caso, essas aberrações resultaram de uma monstruosa combinação entre o empirismo e o ontologismo.

Ellas deviam tornar-se mesmo tanto mais geraes quanto mais profunda era a anarchia theorica. Não se dando conta do verdadeiro destino popular da cultura scientifica, os especialistas se preoccuparam de tornar o calculo fraccio-

nario accessivel aos individuos sem cultura alguma ; como si o destino do proletariado e do patriciado fosse sempre jazer na ignorancia de nossos dias.

Este impulso já os levou a tentar reconstruir a theoria do calculo fraccionario para o caso especial das fracções basicas, assimiladas irracionalmente aos numeros inteiros. Mas simillhante tendencia seria insufficiente para produzir os estragos logicos que acarretou, si os scientistas não estivessem fascinados pelas facilidades inherentes á logica dos signaes.

Seduzidos pela analogia das notações, elles procuraram identificar as concepções.

350.— METHODO A SEGUIR NA APRECIAÇÃO DA SIMPLIFICAÇÃO NORMAL DO CALCULO FRACCIONARIO. INSTITUIÇÃO DESTA SIMPLIFICAÇÃO.—Evitando similhantes desvios, toda a apreciação de tal simplificação consiste em examinal-a segundo as alterações introduzidas no caso geral.

Considerada directamente, a simplificação normal do calculo fraccionario repousa na observação espontanea das facilidades que elle comporta, quando as fracções têm para denominador uma potencia da base numeral.

Nestes casos, a observação feita na multiplicação sobre a facilidade do calculo, quando os factores são multiplos da base, encontra uma confirmação e uma extensão que já era de prever.

Vê-se, então, que taes fracções podem tomar logo a fórma mais simples de que são susceptiveis sem perder o seu caracter, e sem nenhum calculo propriamente dito; porque basta para isso exprimir no numerador e no denominador o mesmo numero de zeros.

351. — INFLUENCIA DA BASE NUMERAL SOBRE AS SIMPLIFICAÇÕES FRACCIONARIAS. — Todavia, essa consideração já mostra as reacções da base numeral sobre a simplificação do calculo fraccionario; porque, assim reduzida, a fracção

póde não ter adquirido a sua mais simples expressão geral, si a base da numeração não fôr um numero primo.

Por exemplo, a fracção basica $\frac{6}{10}$, no systema decimal, está na sua mais simples fórma decimal; mas não se acha reduzida á mais simples de todas as expressões de que é susceptivel.

Com effeito, ambos os seus termos, sendo divisiveis por 2, ella equivale a $\frac{3}{5}$. O mesmo não se dá no systema de base sete, onde a fracção septimal $\frac{6}{10}$ é irreductivel á outra mais simples.

Dahi se conclue que para a mais simples expressão da fracção basica coincidir com a mais simples expressão geral da fracção, a base do systema deve ser um numero *primo*.

Isto constitue mais uma razão de preferencia da base positiva sobre a base theocratica, que o empirismo theorico fez prevalecer até A Comte.

Portanto, no systema septimal as fracções basicas devem ser consideradas habitualmente como irreductiveis; porquanto todas as que não o forem espontaneamente tornam-se taes supprimindo os zeros do numerador e outros tantos no denominador.

Além disso, as fracções basicas não podem dar lugar em nenhum systema de numeração a uma theoria especial da *isomeria*.

Com effeito, as fracções *basicas* differindo pelo gráo da potencia da *base*, a isomeria é conseguida identificando esses gráos, salvo a obrigação de juntar ao numerador o numero de zeros convenientes, afim de não alterar a fracção considerada. O donominador podendo ser notado pela unidade seguida de zeros, é claro que a identificação dos gráos equivale a igualar o numero desses zeros ao do maior dos denominadores, que é evidentemente um multiplo de todos os outros.

Assim, por exemplo, tornaremos isomeras as fracções basicas $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{100}$ e $\frac{1}{1000}$, collocando dois zeros á direita de cada um dos termos da 1ª e um unico zero á direita dos termos da 2ª, achando-se, portanto, $\frac{500}{1000}$, $\frac{30}{1000}$ e $\frac{1}{1000}$.

352. — Sendo assim, conclue-se, pelo que fica exposto, que o exame da simplificação normal do calculo fraccionario reduz-se apenas ao estudo das facilidades que as quatro combinações elementares comportam. (28b).

E' o que faremos no paragrapho seguinte.

§ x θ' (29)

Calculo das Fracções Basicas

353. — RESTRICÇÃO DESTE EXAME AO CASO DAS FRACÇÕES DECIMAES. — Vamos agora examinar as simplificações especiaes que comporta o calculo das fracções basicas.

Devemos restringir o nosso exame ao caso das fracções decimaes. Isto não restringe, porém, a apreciação geral, porque os mesmos raciocinios applicam-se aos outros casos.

354. — ADDICÇÃO, SUBTRACÇÃO E DIVISÃO DAS FRACÇÕES DECIMAES. — Isto posto, é claro que a distincção que vimos no caso geral entre a addicção, a subtracção e a divisão de um lado, e a multiplicação de outro, mantem-se aqui.

Com effeito, vimos que, uma vez tornadas *isomeras* as fracções, a addicção, a subtracção e a divisão se reduziam a effectuar essas combinações entre os numeradores, dando ao resultado o denominador commum.

No caso geral, a operação consta de duas partes: 1ª, uma preparação geral que tem por fim tornar isomeras as

(28b) Notas do Curso do Cidadão R. T. Mendes.

(29) Numero *eikôssi kai enéa* (vinte e nove).

fracções; 2ª, realisar a combinação indicada entre os numeradores.

Quando se trata de fracções decimaes, a primeira parte da operação torna-se de méra realisação immediata, conforme vimos. (352) O calculo, propriamente dito, desapparece aqui e é substituido por uma simples combinação de signaes.

A avaliação reduz-se, pois, a combinar directamente os numeradores assim espontaneamente modificados, e a dar ao resultado o mesmo denominador, tratando-se da addicção ou subtracção. Si um dos termos combinados fôr numero inteiro, a simplificação do calculo é da mesma natureza.

Assim, por ex., para addiccionar as fracções $\frac{9}{100}$ e $\frac{9}{1000}$, bastará addiccionar os numeradores das equivalentes e isomeras $\frac{90}{100}$ e $\frac{7}{1000}$, e dar ao resultado o denominador commum, o que produzirá $\frac{97}{1000}$.

Querendo subtrahir a 2ª da 1ª, effectuaremos esta combinação entre os numeradores, o que dará $\frac{83}{1000}$.

Emfim, para a divisão da 1ª pela 2ª, a combinação dos numeradores respectivos produzirá $\frac{90}{7}$. Si, em lugar da 1ª fracção, tivessemos de combinar com a 2ª o numero inteiro 2, os resultados seriam $\frac{2007}{1000}$ para a addicção; $\frac{1993}{1000}$ para a subtracção; e finalmente $\frac{2000}{7}$ para a divisão do inteiro pela fracção, ou $\frac{7}{2000}$ para divisão da fracção pelo inteiro.

Vê-se, pois, que nestas tres avaliações a simplificação resume-se no modo espontaneo de preparal-as pela isomeria.

355. — MULTIPLICAÇÃO DAS FRACÇÕES DECIMAES. — Sabemos que no caso da multiplicação das fracções ordinarias não é preciso tornal-as isomeras, bastando multiplicar entre si os respectivos termos. Ora, si as fracções forem decimaes, a multiplicação dos denominadores comporta uma simplificação similhante á que vimos para a isomeria.

Com effeito, o producto dos denominadores é ainda uma potencia de 10, de gráo igual á somma dos gráos dos seus factores; podendo, portanto, ser representado pela unidade seguida de tantos zeros quantos existem nos denominadores das fracções combinadas.

Por ex., tratando-se de multiplicar as fracções $\frac{7}{10}$ e $\frac{13}{1000}$, o seu producto será, segundo a regra geral, equivalente á relação entre os productos de 7 por 13 e 10 por 1000 ou 10000; onde se vê que este denominador se fórma justapondo á unidade os zeros dos denominadores combinados.

No caso de um dos factores ser numero inteiro, a regra geral não soffre nenhuma simplificação.

356. — DA SIMPLIFICAÇÃO DEVIDA Á NOTAÇÃO; ADVENTO DESTA. — Todavia, as abreviações indicadas acima podem adquirir um aperfeiçoamento pratico em consequencia de uma modificação na maneira de escrever as fracções basicas.

Um tal aperfeiçoamento resulta da similhança dos seus denominadores, que só differem pelos gráos das potencias correspondentes da base ou, o que é o mesmo, pelo numero de zeros.

Desde então esses denominadores podem ser lidos quando apenas indicados pelo numero de algarismos do numerador, comtanto que este numero se torne igual ao gráo da potencia correspondente, utilisando para isso o zero, que é o signal ordinario das lacunas numeraes. Esse signal, porém, tem então de ser utilisado de modo inverso áquelle que já estava adoptado para a notação fundamental dos numeros inteiros.

Assim, em vez de escrever $\frac{5}{100}$, póde-se escrever 05.

Quando o denominador fosse a base, essa convenção conduziria a representar a fracção pelo algarismo do numerador. Si no calculo só concorressem fracções decimaes,

nenhum inconveniente sobreviria em proceder deste modo. Mas, desde que as fracções decimaes podem ser empregadas concurrentemente com os numeros inteiros, é necessario que a notação permitta as distincções entre uns e outros.

Dahi resultou a convenção de indicar que se trata de uma fracção decimal, collocando um ponto ou mais geralmente uma virgula á esquerda do numerador assim modificado.

Demais, para tornar a notação mais clara e evitar, portanto, os enganos, introduziu-se o habito de especificar por um zero antes da virgula a ausencia dos numeros inteiros.

Tal é a série dos motivos que conduziram á notação usual. Segundo ella, póde-se representar uma fracção decimal sob a fórma de um numero inteiro.

Para isso *supprime-se o denominador da fracção decimal e escreve-se á esquerda do numerador tantos zeros quantos forem precisos para que o numero de seus algarismos fique igual ao grão da potencia do mesmo denominador ou ao numero de zeros deste; tendo o cuidado de pôr um ponto ou uma virgula para separar o seu conjuncto do numero inteiro que porventura contiver e de collocar um zero na ausencia desse numero.*

Reciprocamente vê-se que para voltar do numero assim formado á fracção decimal primitiva, *basta abstrahir da virgula e tomar para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos forem os algarismos existentes á sua direita.*

Assim, por exemplo, as fracções decimaes $\frac{25}{10}$, $\frac{5}{100}$ e $\frac{3}{1000}$ são, respectivamente, representadas por 2,5 0,05 0,003; resultados que podem ser verificados voltando-se áquellas fracções.

Dahi resultam as diversas maneiras de ler os numeros em que concorrem *inteiros* e *fracções* decimaes assim representadas:

1.º O primeiro modo, o mais espontaneo e natural, consiste em *ler todo o numero como si fosse inteiro, ajuntando-lhe o nome do denominador correspondente.*

Assim é que 2,345 e 0,4536 seriam respectivamente enunciados *dois mil tresentos quarenta e cinco millesimos e quatro mil quinhentos e trinta e seis decimos-millesimos.*

2.º O segundo modo, mais usado na numeração concreta decimal e applicado, em geral, quando o numero tem muitos algarismos, consiste em *ler separadamente a parte inteira da parte fraccionaria.*

Assim, por exemplo, 3,456789 lê-se *tres unidades quatrocentos e cincoenta e seis mil setecentos e oitenta e nove millionesimos.*

3.º Emfim, o terceiro modo, mais detalhado e menos usual, por ser o mais longo, consiste em *lêr a parte inteira e em seguida cada um dos algarismos da parte fraccionaria, dando-lhes logo as respectivas denominações.*

Assim, por exemplo, 2,5794681 lê-se *2 unidades, 5 decimos, 7 centesimos, 9 millesimos, 4 decimos-millesimos, 6 centesimos-millesimos, 8 millionesimos e 1 decimo-millionesimo.*

Este ultimo modo de enunciar resulta tambem da propria constituição da fracção considerada $\frac{25794681}{10000000}$, que se decompõe naturalmente em 2 $\frac{5}{10000000}$ $\frac{7}{1000000}$ $\frac{9}{100000}$ $\frac{4}{10000}$ $\frac{6}{1000}$ $\frac{8}{100}$ $\frac{1}{10}$, á similhança dos numeros inteiros. De resto, notemos que, escripta sob a fórma destes, a fracção decimal obedece á mesma lei quanto ao valor de posição dos seus algarismos.

Resulta, com effeito, da decomposição acima que cada algarismo exprime unidades fraccionarias de ordem dez vezes menor que o seu immediato á esquerda, e dez vezes maior que o da direita. Assim é que o algarismo 5 collocado á direita de 2, exprime decimos ou unidades dez vezes menores do que as unidades simples; que o 7 exprime centesimos ou unidades dez vezes menores do que os decimos, e portanto, cem vezes menores do que os centesimos; e assim por diante. De sorte que as diversas subdivisões da unidade acham-se sujeitas á mesma lei de variação decimal, o que fez dar o nome de *dizima* a qualquer das expressões desse genero. (29a).

O uso da virgula sendo, como vimos, separar na dizima o algarismo das unidades do conjuncto daquelles que representam as suas subdivisões, resulta immediatamente:

1.º Que, deslocando a virgula de um, dois, tres.... logares para a direita, a dizima ficará respectivamente mulplicada por 10, 100, 1000....

2.º Que, deslocando a virgula de um, dois, tres.... logares para a esquerda, a dizima ficará respectivamente dividida por 10, 100, 1000....

Com effeito, o numero de algarismos á direita da virgula indica, como vimos, o gráo da potencia do denominador da fracção decimal; de sorte que deslocar a virgula de um, dois, tres.... algarismos, para a direita, equivale a dividir o mesmo denominador por 10, 100, 1000.... o que tornará a fracção 10, 100, 1000.... vezes maior.

E' o que se observa, por exemplo, comparando as *dizimas* 3,465 e 346,5, com as fracções decimaes equivalentes $\frac{3465}{1000}$ e $\frac{3465}{10}$.

(29a) S. Stevin e os que primeiro se occuparam desta notação chamavam *numero de dizima* á fracção decimal assim expressa.

Reciprocamente, deslocando a virgula de um, dois, tres.... algarismos para a esquerda, não fazemos mais do que tornar 10, 100.... vezes maior o denominador, ficando, portanto, a fracção 10, 100, 1000.... vezes menor. E' o que se póde verificar comparando as dizimas 5,48, 0,548 e 0,0548 com as equivalentes expressões $\frac{548}{100}$, $\frac{548}{1000}$ e $\frac{548}{10000}$.

E' evidente que a *dizima* se transformará em um numero inteiro quando o deslocamento da virgula para a direita comprehender o conjuncto de seus algarismos. (29b). Assim é, por exemplo, que 48,2 ou $\frac{482}{10}$ se transformará em 482, quando a virgula fôr deslocada para o ultimo algarismo da direita. Isso não impede de poder-se considerar ainda este ultimo numero como uma *dizima*, desde que, mantendo a virgula, escreva-se um ou mais zeros á sua direita.

De resto, a justaposição de zeros á direita de qualquer *dizima*, não póde alterar o seu valor; porque importa apenas em multiplicar pela mesma potencia de 10 os dois termos da fracção decimal equivalente.

Assim é que são iguaes as dizimas 48,2 48,20 48,200.... porquanto não são mais do que expressões das fracções equivalentes $\frac{482}{10}$, $\frac{4820}{100}$, $\frac{48200}{1000}$....

A notação que usamos hoje é devida a Neper, que aperfeiçoou a notação introduzida por Stevin (nascido em 1548

(29b) Inversamente, um numero inteiro se transformará numa dizima, 10, 100, 1000.... vezes menor do que elle, collocando respectivamente uma virgula á esquerda do seu 1º, 2º, 3º.... algarismos. Por este modo representa-se immediatamente o resultado da divisão de um numero qualquer por 10, 100 e 1000. Isto permitte tambem obter o quociente de sua divisão por um multiplo qualquer de 5, sem effectual-a directamente. Assim, por exemplo, para ter o seu quociente por 25, o multiplicaremos por 4 e separaremos com a virgula os seus dois ultimos algarismos á direita; para ter o quociente por 125 multiplical-o-hemos por 8 e separaremos no resultado os tres ultimos algarismos á direita e etc.

e fallecido em 1620). (29c). A notação deste consistiu, a principio, em assignalar as unidades fraccionarias decimaes de diversas ordens por meio de pequenos circulos collocados á sua direita, encerrando cada um o algarismo correspondente á ordem representada. A parte inteira era indicada por dois circulos concentricos.

Assim, por exemplo, duas unidades e cento e trinta e nove millesimos, ou 2 inteiros, 1 decimo, 3 centesimos e 9 millesimos era escripto deste modo :

2◎1①3②9③

Esta notação foi simplificando-se pouco a pouco. Os circulos, escriptos a principio ao lado dos algarismos, passasaram a ser collocados acima ; depois, os circulos foram supprimidos, e os algarismos que encerravam foram substituidos por pequenos traços. Assim, 3 decimos era representado por 3', 3 centesimos por 3'', 3 millesimos por 3''' ; e assim por diante.

Uma outra notação, devida a Neper, consistia em escrever simplesmente o numerador da fracção sublinhando com um traço os algarismos que representassem a parte fraccionaria decimal.

Assim, trezentos e cincoenta e seis centesimos, ou tres unidades e cincoenta e seis centesimos, escrevia-se deste modo :

$3\underline{56}$

Neper simplificou mais essa notação supprimindo o traço horizontal e separando o inteiro da parte fraccionaria por um traço vertical.

(29c) Disme, enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des Hommes. Premièrement descripte en Flameng, &, maintenant convertie en Français par Simon Stevin, de Bruges. (L'Arithmetique de Simon Stevin, de Bruges par Albert Girard, à Leide. 1686).

Assim, o mesmo numero era escripto:

3/56

Como este traço vertical podia ser confundido com o algarismo 1, Neper, no principio do seculo XVII (29d), substituiu-o por um ponto :

3.56

Finalmente, como o ponto passou em Algebra a indicar a multiplicação, e em Arithmetica a distinguir as classes, foi elle substituido por uma virgula :

3,56

e assim se chegou á notação usada hoje.

360. — EMPREGO DESTA NOTAÇÃO NA NUMERAÇÃO CONCRETA. — Foram, pois, as necessidades commerciaes e industriaes que determinaram o advento desta notação já na éra moderna. Por isso mesmo que ella teve em vista as necessidades praticas, foi na numeração concreta que encontrou uma de suas mais importantes applicações, sobretudo depois da reforma dos pesos e medidas decretada em França.

A facilidade, não só de exprimir, mas ainda de converter umas nas outras as diversas subdivisões da unidade principal, bem como a de referil-a a seus multiplos, fez com que se vulgarizasse e isso nos leva a tratar aqui desta applicação.

I — *Medidas de comprimento.* — Os submultiplos do metro seguindo a mesma lei de decrescimento que os submultiplos decimaes da unidade, é obvio que representando o metro por 1^m, poderemos exprimir respectivamente o *decimetro* por $0^m,1$, o *centimetro* por $0^m,01$ e o *millimetro* por $0^m,001$.

(29 l) The Construction of Logarith., pags. 88 e 89.

Os multiplos do metro, sendo, como vimos, o decametro ou dez metros, o hectometro ou cem metros e o kilometro ou mil metros, etc., é claro que poderemos exprimil-os pelos numeros 10^m, 100^m, 1000^m, etc.

Conhecidas assim as relações entre o metro e os seus multiplos e submultiplos, podemos resolver os dois problemas geraes da numeração, a respeito desta classe de medidas.

1º PROBLEMA — *Escripto um numero decimal exprimindo unidades de comprimento, enuncial-o.*—Do mesmo modo que uma *dizima*, o numero proposto póde ser enunciado de tres maneiras:

1.ª Lendo todo o numero sem distincção de parte inteira e decimal, e dando ao ultimo algarismo o nome da subdivisão metrica que lhe compete.

2.ª Lendo separadamente a parte inteira e a decimal, e dando aos ultimos algarismos enunciados as denominações metricas que lhes convêm.

3.ª Lendo cada algarismo em separado, e dando a cada um a denominação metrica decimal que lhe convém.

Exemplo: Seja o numero $75^m,426$.

1.ª Lê-se: 75426 millimetros.

2.ª Lê-se: 75 metros e 426 millimetros.

3.ª Lê-se: 7 decametros, 5 metros, 4 decimetros, 2 centimetros e 6 millimetros.

E com effeito, o numero proposto compõe-se de sete decametros, cinco metros, etc.; e porque o decametro tem 10 metros, 7 decametros terão 7 vezes 10 ou 70 metros, que, reunidos aos cinco alli existentes, perfazem setenta e cinco metros; passando agora á parte fraccionaria decimal, vê-se que, tendo cada decimetro 100 millimetros, 4 terão 4 vezes 100 ou 400 millimetros, e cada centimetro tendo 10 millimetros, 2 terão 2 vezes 10 ou 20 millimetros, e essas duas parcellas sendo reunidas aos 6 millimetros, formam o total de quatrocentos e vinte seis millimetros.

Cada metro contendo 1000 millimetros, setenta e cinco metros conterão 75 vezes 1000 ou 75000 millimetros; cada decimetro valendo 100 millimetros, 4 decimetros valerão 4 vezes 100 ou 400 millimetros; e finalmente, cada centimetro contendo 10 millimetros, 2 valerão 2 vezes 10 ou 20 millimetros, e reunindo á somma de todas essas parcellas os 6 millimetros do numero dado, este conterá evidentemente setenta e cinco mil quatrocentos e vinte seis millimetros.

2º PROBLEMA — *Enunciado um numero, exprimindo unidades de comprimento, represental-o por meio de algarismos.* — Como o antecedente, este problema ainda apresenta tres soluções:

1.ª Si o numero fôr dictado sem distincção de parte inteira e decimal, escrever-se-ha como se fosse inteiro, collocando a virgula de modo que o ultimo algarismo exprima a ordem de unidades metricas cuja denominação acompanha.

2.ª Si o numero fôr enunciado com distincção de parte inteira e parte decimal, escrever-se-ha primeiramente a parte inteira, e em seguida a parte decimal, separada da primeira por uma virgula, collocada de modo que o ultimo algarismo decimal escripto represente as unidades metricas indicadas pelo enunciado.

Si não houver parte inteira preencher-se-ha o lugar desta com um zero.

3.ª Finalmente, póde-se escrever cada algarismo enunciado, attendendo quanto á sua collocação ao principio indicado na numeração escripta.

Exemplos:

1.º Seja proposto escrever o numero oitocentos e cincoenta e sete mil quatrocentos e sessenta e tres millimetros. Represental-o-emos do modo seguinte: $857,^{m}463$.

2.º Proponha-se escrever o numero seiscentos e vinte e sete metros trezentos e oitenta e quatro millimetros. Notal-o-emos deste modo: $627^{m},384$.

3.º Seja, emfim, proposto escrever o numero sete kilometros, cinco metros, tres decimetros, um centimetro e dois millimetros. Escreveremos $7005^m,312$, onde preenchemos com zeros os lugares das ordens de hectometros e decametros que o numero não contém.

II — *Medidas de superficie.* — O metro quadrado contendo, como vimos, 100 decimetros quadrados, é obvio que o decimetro quadrado é $\frac{1}{100}$ ou 0,01 do metro quadrado.

Do mesmo modo, o decimetro quadrado tendo 100 centimetros quadrados, um destes será igual a $\frac{1}{100}$ do decimetro e, portanto, a $\frac{1}{100 \text{ vezes } 100}$ ou $\frac{1}{10000}$, isto é, a 0,0001 do metro quadrado.

Emfim, o centimetro quadrado tendo 100 millimetros quadrados, um destes será igual a $\frac{1}{100}$ do centimetro e, portanto, a $\frac{1}{10000}$ do decimetro e a $\frac{1}{1000000}$ ou a 0,000001 do metro quadrado.

Representando este por 1^{m^2} poderemos, por conseguinte, exprimir o decimetro quadrado, por $0,^{m^2}01$; o centimetro quadrado, por $0,^{m^2}0001$; e o millimetro quadrado por $0,^{m^2}000001$.

Os multiplos do metro quadrado sendo, como vimos, o decametro quadrado com cem metros quadrados, o hectometro quadrado com cem vezes cem ou dez mil metros quadrados, o kilometro quadrado com dez mil vezes cem ou um milhão de metros quadrados e etc., é obvio que, representando o metro quadrado por $1,^{m^2}$ poderemos exprimir os seus multiplos por $100,^{m^2}$ $10000,^{m^2}$ $1000000,^{m^2}$ e etc.

Conhecidas, assim, as relações entre o metro quadrado, seus multiplos e submultiplos, podemos resolver os dois problemas geraes da numeração para esta classe de medidas.

1º PROBLEMA — *Escripto um numero decimal, exprimindo unidades de superficie, enuncial-o.* — Para isso, divide-se o numero, a partir da virgula para a direita e para a

esquerda, em classes de dois algarismos; dá-se a cada classe da parte inteira, começando da direita, as denominações competentes; e procedendo-se do mesmo modo quanto á parte decimal, enuncia-se cada classe de per si, dando-se-lhe a denominação conveniente: attendendo-se sempre que si a ultima classe da direita contiver apenas um algarismo, deve-se-lhe ajuntar um zero.

Póde-se, tambem, enunciar todo o numero e ajuntar, em seguida, o nome da ultima subdivisão da unidade; ou, então, enunciar a parte inteira separadamente da decimal, dando, em seguida, o nome da ultima ordem de unidades.

Exemplo: Seja o numero 472651,^{m2}28645. Será enunciado do seguinte modo: 47 hectometros quadrados, 26 decametros quadrados, 51 metros quadrados, 28 decimetros quadrados, 64 centimetros quadrados e 50 millimetros quadrados.

Com effeito, pelo que ficou estabelecido, cada uma das unidades de superficie tem um valor 100 vezes maior do que a unidade immediatamente inferior. E', pois, evidente, segundo os principios estabelecidos na nossa numeração decimal, que, considerando o numero dividido em classes de dois algarismos, cada uma dessas classes, a partir da virgula para a esquerda, representará unidades 100 vezes maiores do que as da classe á direita; e da virgula para a direita, cada uma dellas terá um valor 100 vezes menor do que as da classe á esquerda.

2° Problema — *Enunciado um numero exprimindo unidades de superficie, escrevel-o.* — Para isso, escreve-se da esquerda para a direita a mais alta classe de unidades do numero enunciado; e, em seguida, cada uma das outras, devendo-se notar que cada classe consta sempre de dois algarismos, excepto a mais elevada que póde ter um somente; colloca-se a virgula depois da classe que representa as unidades principaes, tendo o cuidado de preencher com

zeros o lugar de qualquer das duas ordens de unidades que, porventura, venham a faltar em qualquer das classes.

Si o numero é enunciado sem distincção de classes, escreve-se em primeiro lugar a parte inteira, e á sua direita a virgula, seguida da parte decimal. Si é enunciado sem distincção de classes, e ainda sem distincção de parte inteira e decimal, escreve-se-o como si fosse inteiro e colloca-se a virgula de modo que caiba ao ultimo algarismo a denominação da subdivisão metrica decimal que lhe compete.

Si, finalmente, o numero representar unidades agrarias, escreve-se da esquerda para a direita, primeiramente a classe dos *hectares*, e em seguida a dos *ares* ; e, collocando-se a virgula á direita desta, passa-se a escrever cada uma das outras classes, tendo-se sempre em vista que cada uma deve constar de dois algarismos.

III — *Medidas de volume.* — O metro cubico contendo, como vimos, 1000 decimetros cubicos, o decimetro cubico tendo 1000 centimetros cubicos e o centimetro cubico compondo-se de 1000 millimetros cubicos, conclue-se, immediatamente, que o metro cubico contém 1000 decimetros, 1000000 de centimetros e 1000000000 de millimetros cubicos. De sorte que o decimetro cubico é igual a $\frac{1}{1000}$ do metro cubico; o centimetro cubico equivale a seu $\frac{1}{1000000}$ e o millimetro cubico a $\frac{1}{1000000000}$.

Portanto, representando-se o metro cubico, como é costume, por 1^{m3} póde-se exprimir o decimetro cubico, por $0,^{m3}001$; o centimetro cubico por $0,^{m3}000001$; e o millimetro cubico, por $0,^{m3}000000001$.

Conhecida a relação entre o metro cubico, seus multiplos e submultiplos, torna-se facil resolver os dois problemas geraes da numeração relativamente a esta classe de medidas.

1° PROBLEMA — *Escripto um numero decimal exprimindo unidades de volume, enuncial-o.* — Para isso, divide-se tanto a parte inteira como a decimal do numero dado em classes de tres algarismos, a partir da virgula para a direita e para a esquerda; attendendo que, si a ultima classe á direita contiver sómente um ou dois algarismos, deve-se completal-a com dois ou um zeros, afim de que cada classe contenha sempre tres algarismos, excepto, porém, a primeira á esquerda que poderá conter um ou mais. Dá-se a cada classe da parte inteira a denominação competente, e, procedendo do mesmo modo quanto á parte decimal, enuncia-se da esquerda para a direita cada classe de per si, ajuntando-lhe a respectiva denominação.

Poder-se-ha, tambem, enunciar todo o numero como si fosse inteiro, e ajuntar em seguida o nome da ultima classe; ou então, enunciar separadamente a parte inteira e a parte fraccionaria, ajuntando a esta a denominação de sua ultima classe á direita.

Exemplo: Seja o numero $93456,^{m3}2872$. Dividindo-o em classes de tres algarismos, o enunciaremos do seguinte modo: noventa e tres decametros cubicos, quatrocentos e cincoenta e seis metros cubicos, duzentos e oitenta e sete decimetros cubicos e duzentos centimetros cubicos.

Porque, examinando as relações entre as diversas unidades de volume, vê-se que 1000 unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior; e que, por conseguinte, cada uma dellas é mil vezes maior do que a immediatamente inferior, e mil vezes menor do que a superior; portanto, em virtude do principio da numeração escripta, cada uma dellas, a partir da virgula para a esquerda, deve representar unidades 1000 vezes maiores do que a classe á direita; e da virgula para a direita, cada uma exprimirá unidades 1000 vezes menores do que a classe á esquerda.

Assim, si a primeira classe á esquerda da virgula representa metros cubicos, a segunda deve representar decametros cubicos, etc.; e si a primeira á direita da virgula deve exprimir decimetros cubicos, a segunda será centimetros cubicos, etc.

Podia-se enunciar o mesmo numero pelos dois outros modos.

2º Problema — *Enunciado um numero decimal exprimindo unidades de volume, represental-o por meio de algarismos.* — Para isso, escreve-se da esquerda para a direita a mais alta classe de unidades do numero enunciado; e, em seguida, cada uma das outras, attendendo que qualquer dellas deve ter sempre tres algarismos, excepto a mais elevada, á esquerda, que poderá ter um ou mais; colloca-se a virgula á direita da classe das unidades principaes, tendo o cuidado de preencher com zeros o lugar de qualquer ordem de unidades que, porventura, faltar em qualquer das classes.

Exemplo: Seja proposto escrever o numero oitenta e seis hectometros cubicos, vinte e sete decametros cubicos, quatrocentos e sessenta e um metros cubicos e cento e dezoito centimetros cubicos.

Escreve-se em primeiro lugar a classe mais elevada, ou dos hectometros cubicos, que consta apenas de dois algarismos; em seguida a esta, a classe dos decametros cubicos, a qual, segundo o enunciado, não contém centena alguma, pelo que será o seu lugar preenchido com um zero; depois desta classe escreve-se a dos metros cubicos, á direita da qual collocaremos a virgula, e em seguida as diversas classes submultiplas do metro cubico.

O numero proposto será, portanto, representado deste modo: $86027461,^{m^3}000118$.

Si o numero fôr enunciado sem distincção de classes, escreve-se em primeiro lugar a parte inteira, e á sua direita a virgula seguida da parte decimal.

Si é enunciado sem distincção de classes, e ainda sem distincção de parte inteira e decimal, escreve-se-o como si fosse inteiro, e colloca-se a virgula de modo que caiba ao ultimo algarismo o nome da subdivisão metrica decimal que lhe convém.

E' escusado tratar da notação das medidas de capacidade, peso, etc.; porque a lei de successão dos multiplos e submultiplos sendo a mesma das medidas lineares, a notação é feita do mesmo modo, salvo a collocação da lettra inicial da unidade principal acima do algarismo que a representa.

Em relação a estas medidas, devemos sómente considerar o modo pelo qual podem ser convertidas nas precedentes, de accôrdo com a lei geometrica que preside a sua derivação.

Antes, porém, vejamos como é possivel converter um numero qualquer exprimindo alguma das medidas consideradas, em outro que represente unidades multiplas ou submultiplas.

IV — *Medidas de comprimento, peso e capacidade.*— Si o numero dado exprime qualquer destas medidas, em que um multiplo ou submultiplo da unidade é 10 vezes maior, ou menor, do que aquelle que o precede, ou o segue immediatamente, sua conversão num multiplo, ou submultiplo, se opera deslocando a virgula para a esquerda, ou para a direita de tantos algarismos quantos forem precisos para attingir a nova ordem de unidades.

Assim, por exemplo, para converter 425,^{kg}367 em grammos, bastará deslocar a virgula de tres algarismos para a direita, o que importa em multiplicar o numero dado por 1000, por ter o kilogrammo 1000 grammos.

Teremos, pois, 425367 grammos.

Si quizessemos converter o mesmo numero em centigrammos, seria preciso avançar com a virgula mais dois

algarismos para a direita, o que nos levaria à preencher com zeros os respectivos lugares, obtendo-se assim 42536700 centigrammos.

Querendo converter $4567,^{m}981$ em kilometros, bastará deslocar a virgula de tres algarismos para a esquerda, o que equivale a dividir este numero por 1000, por ser o metro 1000 vezes menor do que o kilometro.

Teremos, pois, $4,^{km}567981$.

Querendo, ainda, converter o mesmo numero em myriametros, seria preciso avançar com a virgula mais um algarismo á esquerda, obtendo-se assim 4567981 myriametros.

Emfim, querendo converter $0,^{hl}025$ em litros, deslocaremos a virgula de dois lugares para a direita, o que importa em multiplicar este numero por 100, por ser o hectolitro 100 vezes maior do que o litro: o resultado será $2,^{l}5$.

Si o numero dado fôr inteiro, é evidente que a sua conversão em qualquer dos respectivos submultiplos exige que se escrevam tantos zeros á direita quantos forem precisos para chegar ao mesmo submultiplo.

V — *Medidas de superficie.* — Si o numero dado exprime medidas de superficie, a sua conversão num multiplo, ou submultiplo, se opera deslocando a virgula para a direita, ou para a esquerda, de tantas classes de dois algarismos quantas forem precisas para attingir a nova especie de unidades.

Assim, por exemplo, para converter $79264,^{m^2}385$ em hectometros quadrados, deslocaremos a virgula de duas classes de dois algarismos para a esquerda, o que produzirá $7,^{hm^2}9264385$.

Para converter o mesmo numero em centimetros quadrados, deslocaremos a virgula de duas classes para a direita, o que exige a collocação de um zero á sua direita: teremos, assim, 792643850 centimetros quadrados.

No primeiro caso não fizemos mais do que dividir o numero dado por 100 vezes 100 ou 10000, attendendo que o metro quadrado é 10000 vezes menor do que o hectometro quadrado; e no segundo caso multiplicamol-o por 10000, visto como o metro quadrado é 10000 vezes maior do que o centimetro quadrado.

Tratando-se de medidas agrarias, a marcha seria a mesma. Neste caso como naquelle, si o numero dado fôr inteiro e tiver-se de convertel-o em qualquer dos seus submultiplos, é evidente que bastará escrever á sua direita tantos zeros, quantos forem precisos para obter o numero de classes de dois algarismos indicado pela differença entre as unidades dadas e as pedidas.

VI — *Medidas de volume.* — Si o numero dado exprime medidas de volume, a sua conversão num multiplo, ou submultiplo, se opera deslocando a virgula para a esquerda, ou para a direita, de tantas classes de tres algarismos, quantas forem precisas para attingir as unidades pedidas, preenchendo-se com zeros os algarismos que faltarem.

Assim, por exemplo, para converter $2436,^{m^3}7891$ em decametros cubicos, mudaremos a virgula de tres lugares para a esquerda, obtendo-se, assim, $2,^{Dm^3}4367891$.

Para converter aquelle mesmo numero em decimetros cubicos, deslocaremos a virgula de tres lugares para a direita, obtendo-se $2436789,^{dm^3}1$.

No primeiro caso não fizemos mais do que dividir o numero dado por 1000, por ser o metro cubico mil vezes menor do que o decametro cubico; e no segundo caso, multiplicamol-o por 1000, por ser o metro cubico mil vezes maior do que o decimetro cubico.

Tendo de converter o numero dado em centimetros cubicos, o deslocamento da virgula exigiria a juxtaposição de dois zeros á direita delle.

Emfim, si o numero dado fosse inteiro, é evidente que a sua conversão num submultiplo exigiria sempre a juxtaposição de tantas classes de tres zeros, quantas indicasse a differença entre as unidades dadas e as pedidas.

VII — *Conversão entre medidas differentes.*— Em certos casos, sendo dado um numero que exprime medidas de uma classe, póde-se pedir o seu equivalente expresso em medidas de classe differente, desde que as relações entre ellas permittam essa conversão.

Assim é, por exemplo, que se póde perguntar qual o peso de 24 metros cubicos d'agua distillada na temperatura de 4 gráos acima de zero; ou póde haver necessidade de se conhecer qual o volume de 246,^{l}359 de cereaes, etc.

O problema recae, evidentemente, numa das conversões precedentes, que, uma vez realisada, só exige que se troque a denominação da unidade obtida por aquella que corresponde á unidade procurada.

Assim é que para conhecer o peso dos 24 metros cubicos, convertemos este numero em centimetros cubicos e obtemos 24000000, e, como o peso do centimetro cubico é o grammo, concluimos, immediatamente, que o volume dagua em questão pesa 24000000 de grammos ou 24000 kilogrammos.

Similhantemente, por ser o litro a capacidade de um decimetro cubico, 246,^{l}359 serão equivalentes a 246,$^{dm^3}$359 que será o volume procurado.

361. — SIMPLIFICAÇÃO DO CALCULO EM VIRTUDE DA NOTAÇÃO. — Tendo apreciado as abreviações que resultam para a notação das fracções basicas, vejamos quaes as simplificações que essa notação introduz no calculo respectivo. Para isso devemos distinguir o caso da addição, da subtracção e da divisão do que se refere á multiplicação; porque este não exige isomeria, ao passo que aquelle precisa, como vimos, ser preparado por ella.

I — *Addição, Subtracção e Divisão.*— Relativamente á isomeria que prepara este calculo, notemos que, escriptos sob a fórma indicada, as fracções decimaes podem immediatamente ser *reduzidas ao mesmo denominador, ou melhor, á mesma denominação, escrevendo zeros á sua direita, de modo que a parte decimal tenha em todas ellas o mesmo numero de algarismos.*

Assim, por exemplo as fracções 3,97, 2,5, 5,436 e 0,1 ficam, immediatamente, reduzidas á mesma denominação, escrevendo 3,970, 2,500, 5,436 e 0,100.

E' evidente que a collocação destes zeros não altera o valor das fracções; porque importa em multiplicar o numerador e o denominador de cada uma pela mesma potencia de 10, afim de que o denominador commum seja a maior potencia deste numero.

Comprehende-se, pois, que, assim preparadas, nenhuma difficuldade offerecem quanto á sua addição.

Póde-se mesmo dispensar esse preparo, *escrevendo os numeros uns abaixo dos outros, de modo que as virgulas fiquem numa mesma columna vertical*, como se vê em seguida:

$$\begin{array}{r@{,}l} 3&97 \\ 2&5 \\ 5&436 \\ 0&1 \\ \hline 12&006 \end{array}$$

A subtracção offerece similhante simplicidade. Todavia, convém, aqui, igualar sempre o numero de algarismos denominativos, porque póde acontecer que os do minuendo sejam em numero inferior aos do minuidor.

Convém, pois, juxtapor os zeros, ou pelo menos suppol-os tacitamente, como no exemplo seguinte:

$$\begin{array}{r@{,}l} 3&9 \\ 2&032 \\ \hline 1&868 \end{array} \qquad \begin{array}{r@{,}l} 3&900 \\ 2&032 \\ \hline 1&868 \end{array}$$

Como se vê, *reduzimos as fracções á mesma denominação, e dispomos o minuidor abaixo do minuendo, de modo que as virgulas se correspondam, praticando depois a subtracção.*

Nestas condições, vê-se que na addição e subtracção das fracções basicas, as simplificações devidas á notação têm apenas a vantagem de dispensar que sejam explicitamente igualados os denominadores; devendo-se no mais attribuir a facilidade do calculo á propria natureza das fracções.

Na divisão temos que igualar o numero de algarismos denominativos do dividendo e do divisor, collocando zeros á direita daquelle que tiver menos; o que equivale, evidentemente, a tornar isomeras as fracções dadas.

Assim, por exemplo, para dividir 1,5 por 0,005, escreveremos dois zeros á direita do dividendo; e procederemos á divisão como si se tratasse simplesmente de dividir os numeradores inteiros das fracções consideradas:

1500	5
000	300

Portanto, basta *reduzir as fracções á mesma denominação e dividil-as como si fossem numeros inteiros.*

Si o dividendo, ou o divisor, fôr simplesmente um numero inteiro, esta regra não soffre alteração.

Assim é que para dividir 1 por 0,00025 escreveremos cinco zeros á direita do dividendo, o que importa em substituil-o pela fracção $\frac{100000}{100000}$ isomera com o divisor.

Procedendo á divisão, teremos:

100000	25
00000	4000

Si tivessemos, por exemplo, de dividir ainda 15,25 por 5, collocariamos dois zeros á direita deste ultimo numero, e

determinariamos o quociente de 1525 por 500; obtendo-se então $3\frac{25}{500}$, igual a $3\frac{50}{1000}$, isto é, 3,050.

Com effeito, $\frac{1525}{100}$ dividido por 5, equivale a $\frac{1525}{500}$, que é igual a 3 mais $\frac{25}{500}$ ou a 3 mais $\frac{50}{1000}$.

Vê-se, portanto, que as simplificações existentes na divisão, não são devidas á notação, mas sim á propria natureza das fracções.

II — *Multiplicação.*—Na multiplicação a simplicidade é maior: não ha necessidade de tornar as fracções isomeras, *bastando multiplical-as e separar com a virgula, no producto, tantos algarismos denominativos quantos existem em ambos os factores.*

Porque este numero de algarismos, separados para a direita, é a somma dos gráos das potencias de 10 que formam os denominadores dos factores, e equivale, portanto, ao producto desses denominadores.

Assim, por exemplo, para multiplicar 4,37 por 0,213, disporemos o calculo do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 4{,}37 \\ 0{,}213 \\ \hline 1311 \\ 437 \\ 874 \\ \hline 0{,}93081 \end{array}$$

Com effeito, multiplicando $\frac{437}{100}$ por $\frac{213}{1000}$, obtem-se para producto $\frac{93081}{100000}$, ou 0,93081.

Si um dos factores fôr numero inteiro, a regra será a mesma, e o numero de algarismos separados no producto é igual ao do outro factor.

Como na pratica só ha muitas vezes necessidade de conhecer as mais altas unidades do producto total, póde-se effectuar a operação começando-a pela esquerda do multi-

plicador, dispondo-a de modo a obter em primeiro lugar aquellas unidades, como se vê em seguida:

```
    37,25
    27,34
  -------
  7450
 26075
  11175
   14900
---------
1018,4150
```

Esta disposição é aqui mais vantajosa do qua a ordinariamente usada.

362.—Emfim, resumindo as considerações que temos feito, concluimos que todo o calculo das fracções basicas apresenta duas especies de simplificações: umas capitaes, resultantes da naturéza das mesmas fracções, isto é, da relação entre os numeros que a representam e a base do systema adoptado; outras secundarias, que resultam da notação, mas que tornam-se valiosas sob o ponto de vista pratico. Aquellas e estas contribuiram, extraordinariamente, para facilitar o calculo fraccionario; e a tal ponto, que o espirito humano foi levado a reduzir todas as outras fracções a essa sorte de fracções artificiaes. (29e).

§ λ' (30)

Reducção systematica do calculo fraccionario qualquer, ao caso das fracções basicas

363. — DA CONCEPÇÃO DESTA REDUCÇÃO. — Tendo reconhecido as vantagens que resultam para o calculo do em-

(29e) Ramdese, o acrostico deste paragrapho, é o nome de um digno proletario italiano que conheci em minha terra natal. (Palmeira—Est. de Alagôas).

Para attestar seu nobre coração cito o seguinte facto: Passava elle pelo grande açude daquella localidade quando viu que se afogava uma criança do povo. Atirou-se à agua para soccorrel-a, retirou-a do fundo lodoso, mas infelizmente ahi pereceu, apezar de todos os esforços de um seu irmão para salval-o.

(30) Letra lambda, que, assim accentuada, exprime o numero *triákonta* (trinta).

prego das fracções basicas, procurou-se naturalmente reduzir a ellas todas as outras fracções ordinarias.

Para conceber a possibilidade de similhante reducção, consideremos uma fracção ordinaria qualquer propria e irreductivel. Multipliquemos o seu numerador por uma potencia de 10, de modo que se possa dividir o producto pelo denominador. O quociente assim obtido poderá representar uma fracção basica equivalente á proposta, desde que a divisão se faça exactamente.

Com effeito, comparando este quociente com a fracção dada, vê-se que é maior do que ella em virtude da multiplicação do numerador por uma potencia de 10 (242), mas nada impede de tornal-os equivalentes dividindo-o pela mesma potencia de 10.

364. — EXAME DAS CONDIÇÕES DESSA REDUCÇÃO, QUE É QUASI SEMPRE APPROXIMADA. — Em vista das considerações precedentes, concebe-se a possibilidade de realisar em todos os casos a conversão de que se trata. A unica condição exigida, afim de que a fracção decimal obtida seja rigorosamente equivalente á fracção ordinaria proposta, é que a divisão se effectue exactamente.

Ora, é facil verificar que similhante condição só póde realisar-se em casos muito excepcionaes; de sorte que, na maioria das vezes, o resultado obtido só póde ser approximado.

Com effeito, multiplicando o numerador da fracção proposta por uma potencia de 10, é evidente que o producto só será divisivel pelo denominador, quando contiver todos os factores primos deste (301). Ora, os termos da fracção dada sendo por hypothêse *primos entre si*, é claro que a multiplicação do numerador pela referida potencia só poderá introduzir no producto os factores do denominador, quando estes existirem no proprio multiplicador. De sorte que, si as potencias da base não contiverem aquelles

factores, jámais a divisão será exacta; e o quociente obtido poderá representar apenas um valor approximado da fracção proposta.

E' isso o que acontece sempre no systema septimal e em todos aquelles cuja *base* é um numero *primo*.

Todavia, no systema decimal, como em todos aquelles cuja base não é numero primo, a divisão poderá ser exacta no caso excepcional em que a mesma base contiver os factores primos que se acharem no denominador da fracção proposta.

Particularisando a questão para o systema decimal, cuja base compõe-se dos factores 2 e 5, podemos, pois, concluir que, *toda a fracção ordinaria só póde ser convertida numa decimal exactamente equivalente, quando o seu denominador fôr apenas constituido pelos factores primos 2 ou 5; e que, no caso contrario, a fracção decimal obtida só exprimirá o valor da proposta approximadamente.*

E como este ultimo caso é o que tem lugar geralmente, resulta que similhante conversão é quasi sempre approximada. Isto, porém, não prejudica a solução do problema, porquanto veremos que a fracção procurada póde sempre ser obtida com o gráo de approximação exigido pelas nossas necessidades; e comprehende-se bem que as soluções approximadas tornam-se perfeitamente acceitaveis, quando satisfazem a similhante condição.

Emfim, uma vez que é possivel executar o calculo, graduando o erro commettido, as fracções basicas podem sempre substituir outras quaesquer; e uma tal transformação é o primeiro typo de todas aquellas do mesmo genero que, em grande escala, teremos de utilisar no dominio mathematico.

365.—CONVERSÃO DAS FRACÇÕES ORDINARIAS EM DECIMAES: MARCHA DO CALCULO. — Para melhor comprehender similhante transformação, effectuemol-a nó systema decimal.

Procuremos, por exemplo, converter a fracção $\frac{3}{14}$. A questão consiste, evidentemente, em determinar quantos

decimos, centesimos, millesimos.... si contém na fracção proposta.

Dividindo-a para isso por $\frac{1}{10}$ teremos $\frac{30}{14}$, cujo quociente nos exprime o numero de decimos que contém, isto é, 2 decimos; si quizermos levar a approximação até centesimos, teremos de dividir $\frac{3}{14}$ por $\frac{1}{100}$, obtendo-se $\frac{300}{14}$, cujo quociente nos mostrará, então, que 21 centesimos é o valor approximado da fracção proposta; si quizermos levar a approximação até millesimos teremos que dividir $\frac{3}{14}$ por $\frac{1}{1000}$, o que dá $\frac{3000}{14}$ ou 214 millesimos; e assim por diante.

A fracção decimal procurada póde, pois, ser expressa por 2 decimos, por 21 centesimcs, por 214 millesimos.... isto é, por 0,2, por 0,21, por 0,214..., ou por um maior numero de algarismos, si houver necessidade de approximal-a cada vez mais da proposta. Neste caso bastará levar assás longe as divisões acima indicadas, as quaes fornecerão, afinal, um quociente de numero indefinido de algarismos. Estes podem ser obtidos seguidamente dispondo o calculo do modo seguinte:

```
30000 | 14
 20     0,2142....
  60
   40
   12
```

Em vez de escrever os zeros á direita do dividendo, abrevia-se o calculo escrevendo-os á direita dos restos successivos; de sorte que se póde concluir a seguinte regra para converter uma fracção ordinaria em decimal: *Colloca-se um zero á direita do numerador e divide-se o numero assim formado pelo denominador; ao resto juxtapõe-se um zero, e divide-se o numero assim formado pelo mesmo divisor, e assim por diante; escrevendo os quocientes successivos uns ao lado dos outros, de modo que exprimam respectiva-*

mente os decimos, os centesimos, os millesimos.... da fracção procurada.

Empregando esta regra para converter em decimal a fracção $\frac{1}{7}$, teremos :

```
10   | 7
 30   0,14285714....
  20
   60
    40
     50
      10
       30
        2
```

Onde depois da primeira divisão que forneceu os decimos do quociente, multiplicamos o respectivo resto por 10, para obter os centesimos mediante uma segunda divisão, e etc.

Depois de seis divisões successivas, os algarismos do quociente começam a reproduzir-se á medida que continuamos a escrever zeros á direita dos restos; de sorte que, á similhança do exemplo precedente, o quociente obtido é illimitado, e representa apenas um valor approximado da fracção proposta.

A regra acima é tambem frequentemente empregada para approximar o quociente da divisão de dois numeros inteiros ou fraccionarios decimaes, quando a operação não se effectua exactamente. Para isso basta applical-a á fracção que tem para termos o resto da divisão e o respectivo divisor, obtendo-se, assim, os decimos, os centesimos, ... que approximarão, cada vez mais, a parte inteira do quociente de sua expressão completa. Isso equivale, evidentemente, a substituir a fracção ordinaria que completa o quociente por uma fracção decimal, que della se approxima tanto quanto quizermos; e que fica, desde então, incorporada ao mesmo quociente.

Assim é, por ex., que, dividindo 3 por 2 e 90 por 7, obtemos respectivamente os quocientes 1,5 e 12,85 ....,

sendo o primeiro exacto, e o segundo approximado a menos de um 0,01 porque o seu complemento, isto é, o resto dividido pelo divisor, é menor do que esta fracção.

Quando a natureza do calculo exige uma approximação mais rigorosa, é muitas vezes conveniente tomar o quociente approximado por *excesso*. Tendo o quociento approximado por *falta*, sabemos que para tel-o por *excesso*, basta augmentar de uma unidade aquelle quociente, o que se deve fazer quando o resto que lhe corresponde é maior do que a metade do divisor.

No exemplo acima, dividindo 90 por 7 achamos o quociente 12,85 sem erro de 0,01, e o resto 5 maior do que a metade do divisor 7. Tomando por excesso o ultimo algarismo do quociente, póde-se reduzir aquelle erro á metade, isto é, a menos de $\frac{1}{2}$ centesimo ou 0,005.

Com effeito, escrevendo um zero á direita do resto, vê-se que o algarismo seguinte do quociente é maior do que 5. Nestas condições, o verdadeiro quociente achase comprehendido entre 12,855 e 12,860, cuja differença é de $\frac{1}{2}$ centesimo, isto é, 0,005.

Portanto, tomando 12,86 para valor approximado do quociente, o erro commettido será menor do que $\frac{1}{2}$ centesimo.

Quando o resto é menor do que a metade do divisor, convém manter o quociente por falta; visto como o erro commettido torna-se tambem menor do que meia unidade da ordem indicada pelo ultimo algarismo do mesmo quociente.

Supponhamos, por ex., que se tenha dividido 22 por 7, e chegado ao quociente por falta 3,14, sem erro de 0,01, e ao resto 2, que é menor do que a metade do divisor.

Escrevendo um zero á direita deste resto, vê-se que o algarismo seguinte do quociente é menor do que 5. De sorte que o verdadeiro quociente acha-se comprehendido entre 3,145 e 3,140, que differem entre si de 0,005 ou $\frac{1}{2}$

centesimo. Ora, si o quociente está comprehendido entre dois numeros que differem entre si de $\frac{1}{2}$ centesimo, elle differirá de qualquer delles de menos de $\frac{1}{2}$ centesimo. Portanto, adoptando um delles 3,14, para valor approximado do quociente, o erro commettido será menor do que $\frac{1}{2}$ centesimo.

366.—LEI DE SUCCESSÃO DOS ALGARISMOS DO QUOCIENTE: SUA REPRODUCÇÃO PERIODICA. CONSEQUENCIAS. — Acabamos de vêr que uma fracção ordinaria póde sempre ser convertida em decimal. Mas vimos, tambem, que similhante conversão só é exacta no caso particularissimo em que o denominador da fracção ordinaria irreductivel é sómente formado pelos factores 2 e 5 (como, por ex., nas fracções $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$ e $\frac{1}{500}$).

Ora, essa circumstancia verificando-se raramente, resulta que a maior parte das fracções não póde ser rigorosamente convertida em decimaes.

Mostrámos que a operação conduzia neste caso a uma serie indefinida de algarismos do quociente, permittindonos assim uma approximação maior ou menor, conforme as nossas necessidades.

As fracções que não podem ser avaliadas rigorosamente, por decimaes, offerecem na sua expressão approximada, quando esta elevada assás longe, um caracter notavel que facilita a approximação e permitte as achar de novo : é a reproducção periodica dos mesmos algarismos.

Uma tal reproducção resulta, necessariamente, da successão indefinida delles. Porque, como não póde haver para resto em cada divisão sinão um dos numeros inteiros que precedem o divisor, é preciso necessariamente que, quando se tiver feito mais divisões do que taes numeros, se reproduza um dos restos precedentes, e que, por conseguinte, os dividendos parciaes e os respectivos quocientes reappareçam na mesma ordem.

Assim, por ex., convertendo a fracção $\frac{12}{37}$ achar-se-ha a serie 0,324324...., onde se vê que os algarismos 3, 2 e 4 se reproduzem na mesma ordem e periodicamente.

De sorte que, si fosse preciso uma approximação maior, poderiamos obtel-a sem calculo, escrevendo á direita da fracção decimal tantos *periodos* daquelles numeros, quantos fossem precisos.

Uma vez conhecido o periodo, qualquer destas series póde, pois, ser prolongada tanto quanto nossas necessidades o exigem, sem que para isso sejamos especialmente obrigados a calcular novos termos.

Todavia, não é muitas vezes indispensavel conhecer mesmo todo o periodo, sobretudo si este tem muitos algarismos. Neste exemplo, tres divisões bastaram para patentear a lei de successão dos algarismos da *fracção decimal periodica*. Mas, no exemplo acima, em que tomamos a fracção $\frac{1}{7}$, foram precisas seis divisões, porque achámos para restos successivos os seis numeros 3, 2, 6, 4, 5 e 1, que estão abaixo de sete; a fracção encontrada foi 0,142857142857.... ; e é evidente que não se precisaria conhecer todo o periodo para ter-se uma grande approximação. A fracção $\frac{2}{3}$ daria sómente 0,6666.... em que logo depois da virgula apparece o algarismo periodico 6.

Notemos, porém, que em certos casos, a *parte periodica* não surge logo depois da virgula, havendo entre ella e esta um ou mais algarismos que não se reproduzem nunca, e que por isto formam o que se chama a *parte não periodica* da fracção decimal. E' o que observamos na fracção 0,21414.... que obtivemos pela conversão de $\frac{106}{495}$ em fracção decimal. Vê-se ahi, com effeito, apparecer o algarimo 2 logo depois da virgula e antes do periodo 14; de sorte que 2 é a parte não periodica da fracção e 14 é o periodo.

As fracções deste genero são chamadas *periodicas mixtas* ou *complexas*, para distinguil-as daquellas que, não

possuindo a parte não periodica e formando-se sómente de *periodos*, são denominadas periodicas *plenas* ou *simples*. E note-se que estas periodicas existem, qualquer que seja a base adoptada.

Convertendo, por ex., as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{20}$ escriptas no systema septimal, obteremos para a primeira a periodica simples 0,333...., e para a segunda a periodica composta 0,033...., onde a parte não periodica é representada por um zero.

Resulta das considerações precedentes que, seja qual fôr a base numeral adoptada, a conversão das fracções ordinarias póde ser effectuada do mesmo modo. Ella conduz sempre a periodicas simples e mixtas, só dando lugar a fracções finitas quando a base é decomponivel.

Além disso, notemos que é sempre possivel decompôr a periodica mixta em duas fracções: a primeira tendo para numerador a parte não periodica e para denominador a potencia de 10 indicada pelo numero dos algarismos correspondentes; e a segunda tendo para numerador a periodica simples formada dos periodos, e para denominador aquella mesma potencia.

Assim, por ex., a periodica mixta, acima obtida, 0,21414.... equivale evidentemente á somma de $\frac{2}{10}$ com $\frac{0,1414....}{10}$.

Por sua vez, qualquer periodica simples póde ser transformada numa somma indefinida de fracções basicas, tendo todas para numerador o periodo, e para denominador as potencias successivas de 10, cujos zeros são indicados pelo numero de algarismos do periodo, multiplicado pela ordem deste.

Assim, por ex., a fracção obtida para $\frac{1}{7}$, isto é, 0,142857142857.... póde ser substituida pela somma de uma infinidade de outras, taes como: 0,142857, 0,000000142857,

0,00000000000142857.... ; onde cada uma é igual á precedente, multiplicada por $\frac{1}{1000000}$.

Além da utilidade especial e pratica a que nos temos referido, o problema da transformação das fracções ordinarias em series desta especie, torna-se logicamente importante como o primeiro typo de uma grande classe de metamorphoses que teremos occasião de empregar ; quer para comparar os numeros e apprehender suas relações ; quer para proceder ás respectivas avaliações.

Para o calculo das relações entre os numeros, veremos que não ha restricção alguma nesse emprego, desde que se conhece a lei segundo a qual os termos da serie se succedem ; mas, no ponto de vista dos valores, torna-se necessario que esta successão de numeros decresça rapidamente, de modo que não seja preciso para representar a somma, tomar um numero de termos muito consideravel ; é preciso, em uma palavra, que os termos da serie sejam bastante *convergentes*.

400. — ESTUDO DO PROBLEMA INVERSO. SEGUNDA NOÇÃO DE LIMITE. — Póde-se propôr o problema inverso ao que acaba de ser resolvido, consistindo em saber qual a fracção ordinaria que produz uma certa fracção periodica. Logicamente, este problema tem a vantagem de nos fornecer um segundo exemplo da noção de limite, de que já tivemos o primeiro no estudo das fracções ordinarias.

Vimos, com effeito, que dando accrescimos successivos e iguaes a ambos os termos de uma fracção, ella cresce, quando é *propria*, e decresce quando é *imprópria*, approximando-se indefinidamente da unidade, sem entretanto jámais attingil-a. Dissemos então que a unidade é o limite de taes fracções. Ora, a mesma noção nos apparece aqui, comparando uma dizima periodica com a fracção ordinaria que a produz.

Notamos, com effeito, na operação correspondente, que o quociente periodico póde-se approximar indefinidamente da fracção proposta, mas que nunca lhe póde ser equivalente. De

sorte que uma tal fracção torna-se o *limite* da periodica a que deu lugar.

A geratriz ou limite de uma serie periodica é, pois, uma quantidade constante, da qual a dizima se approxima indefinidamente, á medida que cresce o numero de periodos.

De modo que, tomando estes em numero infinitamente grande, póde-se fazer com que a differença entre ambos seja infinitamente pequena, isto é, menor do que qualquer grandeza imaginavel. Desde então, o valor de uma póde ser, rigorosamente, tomado pelo valor da outra.

Em geral, póde-se dizer que ***duas quantidades são iguaes, quando ellas apenas differem de uma quantidade infinitamente decrescente.*** E' este um principio que as applicações concretas fizeram induzir ; e que, formulado em *in abstracto* por Leibnitz, tornou-se uma das bases da parte mais transcendente do dominio mathematico.

401. — REGRA PARA DETERMINAR A FRACÇÃO GERATRIZ DE UMA PERIODICA SIMPLES. — As fracções que têm para denominador um numero qualquer de 9 só têm em seus periodos o algarismo significativo 1, ou este algarismo precedido de zeros, Porque cada divisão parcial effectuando-se sobre os numeros 10, 100, 1000, etc., deixa sempre para resto a unidade, e só póde dar para quociente 0 ou 1.

E' assim que:

$\frac{1}{9}$ produz 0,1111....

$\frac{1}{99}$ » 0,010101....

$\frac{1}{990}$ » 0,001001 e etc. (30a).

(30a) Estas mesmas periodicas seriam produzidas similhantemente, em qualquer systema de numeração: por exemplo, no de base septimal as fracções ordinarias seriam $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{66}$, $\frac{1}{666}$ e etc.

Utilisando esta observação passa-se, facilmente, de uma dizima periodica para a fracção ordinaria donde ella deriva. Vê-se, por ex., que 0,6666.... equivale á fracção 0,1111.... multiplicada por 6; e como esta outra é o desenvolvimento de $\frac{1}{9}$, conclue-se que a primeira é o de $\frac{1}{9}$ multiplicado por 6 ou de $\frac{6}{9}$, ou emfim de $\frac{2}{3}$.

Quando o periodo tiver dois, tres.... algarismos, compararemos a dizima com as que resultam de $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$.....

Assim, tomemos, por ex., 0,648648.... ; é evidente que esta fracção equivale ao producto de 0,001001... pelo numero 648. Multiplicando, pois, $\frac{1}{999}$ de que esta periodica é o desenvolvimento, por 648, ter-se-ha para aquella $\frac{648}{999}$, cujos termos sendo divididos por 27, darão $\frac{24}{37}$.

Este raciocinio podendo applicar-se a qualquer destas series, concluimos que *a geratriz de uma periodica simples é expressa por uma fracção ordinaria tendo para numerador um dos periodos, e para denominador tantos noves quantos os algarismos de cada periodo.*

Esta regra mostra que o denominador da *geratriz de uma periodica simples não póde conter os factores 2 e 5*; porque um numero formado de algarismos 9 não póde ser divisivel por elles.

402. — Caso da fracção geratriz de uma periodica mixta e sua determinação. — Consideremos agora o caso mais complexo em que se procura determinar a geratriz de uma periodica mixta.

A questão reduz-se facilmente á precedente, multiplicando a serie por uma potencia de 10 de gráo igual ao numero de algarismos da parte não periodica. Desde então, para chegar ao resultado, bastará dividir pela mesma potencia de 10 a geratriz da periodica simples assim obtida.

Seja, por ex., proposto determinar a geratriz da periodica 0,21414..... Transportando a virgula para o algarismo que

precede o periodo, o que importa em multiplical-a por 10, teremos 2,1414.... que equivale evidentemente, á somma de 2 com 0,1414....

Determinando a geratriz desta periodica simples obtemos $\frac{14}{99}$. Juntando esta fracção áquelle numero inteiro teremos $\frac{2 \text{ vezes } 99 \text{ mais } 14}{99}$.

Como, porém, multiplicamos por 10 a periodica proposta, a geratriz correspondente deverá achar-se multiplicada pelo mesmo numero; e para ter a verdadeira deveremos, pois, dividil-a por 10; obtendo-se assim $\frac{2 \text{ vezes } 99 \text{ mais } 14}{990}$ ou $\frac{212}{990}$.

Tomemos ainda a periodica 0,253030.... Multiplicando-a por 100 obtem-se 25,3030....

Determinando a geratriz desta periodica simples, tem-se 25 mais $\frac{30}{99}$ ou $\frac{25 \text{ vezes } 99 \text{ mais } 30}{99}$. Dividindo esta geratriz por 100, para compensar aquella multiplicação, virá $\frac{25 \text{ vezes } 99 \text{ mais } 30}{9900}$ ou $\frac{2505}{9900}$ para a geratriz procurada.

O raciocinio que fizemos para estas series sendo applicavel a qualquer outra, conclue-se que *a geratriz de uma periodica mixta é a fracção ordinaria que tem para numerador a parte não periodica multiplicada por um numero formado de tantos noves quantos os algarismos do periodo mais este periodo; e para denominador o numero formado de tantos noves quantos os algarismos do periodo, seguido de tantos zeros quantos os algarismos da parte não periodica.*

Applicando esta regra á periodica mixta 0,0005050... acha-se $\frac{50}{99000}$ ou $\frac{1}{1980}$ para a geratriz procurada.

Neste exemplo, em que a parte não periodica é formada por zeros, desapparece o producto no numerador, que fica reduzido ao periodo 50.

Nos systemas de numeração cuja base é um numero primo, as periodicas mixtas são similhantes a esta, isto é, têm sempre a parte não periodica representada por um,

dois, tres.... zeros (30b); de sorte que o numerador da geratriz é simplesmente um dos periodos.

Assim é, por ex., que no systema septimal as geratrizes das periodicas 0,05050.... e 0,0033.... são $\frac{50}{660}$ e $\frac{3}{600}$, que simplificadas reduzir-se-hão a $\frac{5}{660}$ e $\frac{1}{200}$.

Tomando ainda as periodicas mixtas 0,0500500.... e 0,0090009000.. ., no systema decimal, achariamos $\frac{500}{9990}$ e $\frac{9000}{999900}$ ou $\frac{50}{999}$ e $\frac{90}{9999}$ para as respectivas geratrizes. Observando a constituição destas, nota-se que o denominador da primeira, $\frac{50}{999}$, é maior do que 10 vezes o respectivo numerador; e que o denominador da segunda, $\frac{90}{9999}$, é maior do que 100 vezes o seu numerador.

Estendendo este exame a outras fracções deste genero, chega-se á conclusão de que *as periodicas mixtas cuja parte não periodica é expressa por um, dois, tres.... zeros são produzidas por fracções ordinarias irreductiveis, em que o denominador é maior do que 10, 100, 1000.... vezes o respectivo numerador.*

Estão, por exemplo, neste caso as fracções $\frac{1}{30}$, $\frac{7}{300}$, $\frac{3}{5000}$, $\frac{1}{1010}$ e etc.

Nota-se que esta conclusão é verdadeira em qualquer systema de numeração, quer seja ou não numero primo a base empregada.

Cumpre, todavia, observar que, si a base não fôr um numero primo, esta conclusão póde ser precisada apreciando a outra especie de periodicas mixtas; isto é, aquellas cuja parte não periodica é representada por algarismos differentes de zero, conforme já conhecemos no nosso systema de numeração. Para determinar quaes as fracções ordinarias

---

(30b) A simplicidade de taes fracções, quando comparadas com as outras, constitue mais um motivo de preferencia da base sete sobre a base dez.

que as podem produzir, precisamos examinar mais detidamente a regra a que acima chegamos.

Ella é ordinariamente enunciada sob uma outra fórma, a que facilmente se chega substituindo os algarismos 9 que figuram no numerador da expressão obtida, pela potencia immediata de 10 diminuida de uma unidade, e effectuando depois a multiplicação indicada.

O numerador da fracção geratriz torna-se igual á parte decimal não periodica seguida de um dos periodos, menos a parte decimal não periodica.

No caso particular em que a parte não periodica é formada de zeros, o numerador reduz-se ainda ao periodo. O denominador é sempre o mesmo.

Por este enunciado vê-se que o numerador da geratriz de uma periodica mixta não póde terminar em zero, a não ser naquelle caso particular. Porque o numerador sendo uma differença, para que tal acontecesse, seria preciso que o ultimo algarismo do minuendo, que é o do periodo, fosse igual ao ultimo do minuidor, que é o da parte não periodica. Mas, então, este ultimo algarismo seria o primeiro do periodo e teria havido engano na consideração deste.

Pelos dois enunciados vê-se ainda que o denominador da geratriz encerra os factores 2 e 5 tantas vezes quantos os algarismos da parte não periodica, por isso que se acha multiplicado por 10 um mesmo numero de vezes.

Combinando esta conclusão com a precedente, percebe-se que simplificando a geratriz se poderá supprimir do seu denominador os factores 2 ou 5; mas que não é possivel supprimir uns e outros simultaneamente, a não ser naquelle caso particular. Porquanto, para isso, seria preciso dividir por 10 o numerador da mesma fracção, o que não tem lugar por não ser elle terminado em zero.

A simplificação da geratriz de uma periodica mixta a transforma, portanto, numa fracção ordinaria irreductivel

cujo denominador encerra um dos factores 2 ou 5, ou mesmo ambos, tantas vezes quantos os algarismos da parte não periodica da dizima correspondente.

Vemos, portanto, que *as periodicas mixtas cuja parte não periodica é representada por algarismos differentes de zero, são produzidas por fracções ordinarias irreductiveis nas quaes o denominador encerra os factores 2, ou 5, combinados com outros differentes.*

Estão, por exemplo, nestes casos, as fracções $\frac{3}{14}$ e $\frac{2}{15}$, $\frac{17}{44}$ e $\frac{13}{75}$, $\frac{37}{70}$ e $\frac{101}{300}$ e etc.

Effectuando estas conversões, vêr-se-ha que o numero de algarismos da parte não periodica é igual ao maior numero de vezes que qualquer desses factores figura no denominador, ou ao numero de vezes que entram os dois conjunctamente.

Por ex., para a ultima das fracções propostas em que 2 e 5 figuram conjunctamente duas vezes, encontramos 0,3366.... ao passo que para a terceira, em que 2 entra duas vezes, achamos 0,386386....

Em qualquer hypothese o numero de algarismos da parte não periodica e do periodo deve ser inferior ao denominador; porque este representa o divisor, e já vimos que o numero de restos differentes lhe é sempre inferior.

As considerações precedentes permittem, pois, deduzir as seguintes propriedades que facilitam a conversão das fracções ordinarias em decimaes e que são apenas uma reacção do problema inverso sobre o directo:

1ª. Toda fracção ordinaria irreductivel cujo denominador só contiver os factores 2 e 5, produz uma fracção decimal finita.

Vimos, com effeito, que sómente neste caso podia o denominador tornar-se um submultiplo exacto do numerador, desde que fosse este multiplicado por 10, 100, 1000 e etc. O numero de algarismos da fracção decimal é evi-

dentemente igual ao gráo da potencia de 10 multiplicada pelo numerador.

2ª. Toda fracção ordinaria irreductivel cujo denominador não contiver os factores 2 e 5, produzirá uma fracção periodica simples.

Com effeito, a dizima não póde ser finita, porque para isso seria preciso que o denominador só contivesse os factores 2 e 5. Não póde ser periodica mixta, porque si assim fosse, a geratriz desta teria para denominador um numero formado de noves e terminado em zero. O numerador correspondente não podendo, como vimos, terminar tambem em zero, resulta que a simplificação de tal geratriz não poderia eliminar do seu denominador os factores 2 e 5 conjunctamente; de sorte que o denominador da fracção resultante conteria qualquer destes factores, o que é contrario á hypothese, porquanto suppomos que o denominador da fracção proposta só possuia factores differentes.

3ª. Toda fracção ordinaria irreductivel cujo denominador contiver factores differentes de 2 e 5, juntamente com qualquer destes factores ou ambos, produzirá uma periodica mixta.

Com effeito, a dizima não póde ser finita, porque o denominador da fracção contém factores differentes de 2 e 5; não póde ser periodica simples, porque o denominador da fracção possue tambem factores iguaes a 2 e 5. Logo, será necessariamente uma periodica composta. (30c).

(30c) Declerc, o acrostico deste paragrapho, é o nome de um digno proletario francez.

Para mostrar quão bem comprehendia a dignidade de suas funcções, basta citar esta phrase sua: « Trabalhando para os capitalistas, eu sirvo á Sociedade, a quem tudo devemos.»

CAPITULO XI

Complemento theocratico do Calculo Fundamental. (Theoria da raiz quadrada); reacção de similhante accrescimo sobre as concepções numericas: numeros incommensuraveis

§ λ α' (31)

Concepção da theoria da raiz quadrada

403. — BREVES CONSIDERAÇÕES GERAES SOBRE A PARTE COMPLEMENTAR DO CALCULO ARITHMETICO. — O conjuncto das lições sobre os numeros fraccionarios já faz sobresahir bem a distincção entre o *calculo dos valores* e o das *relações*; mostrando ao mesmo tempo a necessidade de fazer preceder as avaliações um pouco complicadas pela apreciação das relações em que ellas se baseam.

O estudo do Calculo Arithmetico, até hoje realizado, já bastaria em rigor para fazer desejar uma apreciação especial do *calculo das relações,* antes de proseguir no estudo do *calculo dos valores.*

Por outro lado, o nosso estudo arithmetico tem patenteado a connexão de todo o surto do calculo, quer dos *valores,* quer das *relações,* com o desenvolvimento especial da *Geometria*; e a aptidão dessa duplo calculo para generalisar e systematisar as combinações numericas dos diversos gráos e dos diversos modos de *extensão.*

---

(31) Numero *triáhõnta kai éis...* (trinta e um).

BONDADE.

De sorte que já o nosso espirito deve estar disposto para aspirar por uma instituição immediata do calculo das *relações* ; reconhecendo, porém, que essa instituição não poderá proseguir além de certo limite, sem uma elaboração directa da Geometria. Isto é, póde-se desde já conceber que o Calculo Algebrico, surgido do *Calculo Arithmetico*, deve desenvolver-se tanto quanto esta base o permittir, de modo a assistir as elaborações geometricas.

Apezar disto, porém, A. Comte julgou que, « além do calculo fundamental dos numeros quaesquer, a parte do Calculo Arithmetico, que deve ser tratada antes da *Algebra*, póde com utilidade esboçar duas doutrinas complementares : uma relativa ás *raizes* e outra ás *progressões* ».

404. — Os MOTIVOS QUE RESTRINGEM ESSE EXAME COMPLEMENTAR Á RAIZ QUADRADA E ÁS PROGRESSÕES DIRECTAMENTE EMANADAS DA ESCALA ARITHMETICA. — Essa utilidade póde ser reconhecida, em primeiro logar, de um modo synthetico, em virtude da necessidade de reproduzir, na iniciação systematica, a evolução fundamental da Humanidade. Não só essa marcha é prescripta pela terceira lei da Philosophia Primeira, mas tambem desenvolvemos assim melhor o nosso altruismo, contrahindo habitos de submissão voluntaria para com o Passado. De facto, essas theorias foram instituidas essencialmente pelo periodo theocratico.

Em segundo logar, ellas nos permittirão sentir, ainda melhor, a distincção entre os dois aspectos do calculo, levando o Calculo Arithmetico até o seu limite extremo, em que a Algebra e a Geometria lhe são directamente subordinadas.

Comprehender-se-ha, assim profundamente, o alcance das meditações numericas, quando prevalecem as avaliações como objecto coordenador das meditações mathematicas.

E por outro lado, ficar-se-ha mais compenetrado da necessidade do surto distincto do Calculo Algebrico, como preambulo da instituição da Geometria Especial.

Mas, para que o complemento de que se trata satisfaça esse destino, é preciso que elle se reduza ás questões que comportam realmente a preponderancia do ponto de vista do valor sobre o das relações, e mesmo sobre as inspirações geometricas.

Ora, assim comprehendida, a theoria das raizes só deve ser estudada em Arithmetica no que se refere á *raiz quadrada*; e a *theoria das progressões* deve ficar restricta ás *progressões arithmeticas*, seguida dos *numeros figurados*.

Deixaremos para occasião mais opportuna a apreciação dos fundamentos da segunda restricção. Quanto á primeira, resulta ella da *extracção geral* modificar-se assás, para que convenha consideral-a de uma maneira especial e directa, como o permitte a simplicidade da lei numerica em que ella se basêa. A respeito das outras raizes, mesmo cubicas, a operação, tornada mais uniforme e mais incommoda, só deve ser instituida depois da expressão normal das noções algebricas que ella exige.

Unica comprehendida no dominio fundamental da Arithmetica, a raiz quadrada manifesta melhor a efficacia pratica e theorica que ella comporta.

405. — NOÇÕES SOBRE O ADVENTO HISTORICO DA THEORIA DAS RAIZES EM GERAL, E ESPECIALMENTE DA RAIZ QUADRADA. — A noção de *raiz*, com a sua maxima generalidade, achava-se implicitamente contida na concepção geral da numeração systematica. Porque as unidades de diversas ordens sendo as *potencias* successivas da *base* numeral, a base torna-se reciprocamente, em gráos diversos, a raiz das unidades compostas.

Essa noção tem, porém, um caracter demasiado abstracto para ter atrahido a attenção do sacerdocio primitivo. Todas as noções theoricas essenciaes tiveram sempre uma fonte pratica, quer a acção visasse á ordem exterior, quer tivesse por fim a ordem humana.

Eis porque a noção de raiz surgiu com um caracter especial na *Geometria*, onde representou, por muito tempo, o *lado* do quadrado, considerado quanto á sua relação *numerica* para com a area da mesma figura. Muito mais tarde foi que a medida do *cubo* levou a considerar a aresta deste como a *raiz* de seu *volume*.

Durante muitos seculos a noção de *raiz* não passou desses dois primeiros gráos ; e nem a noção das *potencias* passou além do terceiro gráo.

Na phase final da evolução theorica da Grecia, a consideração das potencias estendeu-se, mas sem tornar-se indeterminada, como se percebe á vista dos nomes que tinham. Aliás nem as potencias, nem as raizes do terceiro gráo foram consideradas como correspondendo a phenomenos concretos. Assim, a quarta potencia chamava-se *quadrado-quadrado* a quinta *quadrado-cubo*, a sexta *cubo-cubo* e assim por diante.

Essa nomenclatura, como se vê, não podia ir longe. Em todo o caso, a formação de qualquer potencia não comporta nenhuma operação especial, salvo a simplificação de sua determinação pelos *logarithmos*, de que trataremos na Algebra.

E a extracção das raizes não poude ser instituida como uma operação geral senão depois de Newton (1642-1727), salvo tambem a simplificação logarithmica que a precedeu de cerca de meio seculo.

Até os tempos modernos a extracção das raizes ficou, pois, limitada aos dois primeiros gráos. Mas destes, só a raiz quadrada comporta uma instituição especial.

A extracção da raiz cubica opera-se segundo a regra geral e, portanto, a sua consideração isolada torna-se excusada. Aliás ella não faz surgir sobre os numeros noção alguma nova, além das que já provêm da raiz quadrada.

Voltando, pois, a esta, notemos que a operação foi determinada pela necessidade de resolver o seguinte problema :

Dada a area de um quadrado, determinar o seu lado, ou melhor, construir um quadrado cuja area suppõe-se conhecida.

Concebe-se que é sempre possivel construir uma infinidade de rectangulos cujas superficies sejam iguaes a uma area dada.

O problema entra numericamente na divisão, como vimos; porque escolhido o tamanho de um dos lados, a grandeza do outro é determinada mediante a divisão da area dada pelo lado escolhido.

Esse problema comporta uma solução geometrica.

406. — DA COMPARAÇÃO DA EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA COM A DIVISÃO. — A divisão e a extracção da raiz visam ambas a decomposição de um producto em dois factores.

No caso da divisão, o producto e um dos factores são conhecidos.

No caso do quadrado, os dois factores são desconhecidos, mas o facto de serem iguaes basta para determinal-os.

Vê-se, por ahi, que a extracção da raiz é uma operação analoga á divisão, porém, mais complicada; ou melhor, é a propria divisão na qual o conhecimento do divisor é substituido pelo facto de saber-se que o divisor é igual ao quociente. (31a).

Procurar, portanto, um numero que multiplicado por si mesmo dê um outro, ou que tomado para divisor de outro forneça um quociente igual a si, eis em que consiste o problema numericamente encarado.

(31a) Poder-se-hia imaginar, entre os factores, qualquer outra relação de grandeza; por ex., que sua somma, ou sua differença, fosse igual a um numero dado; ou que um delles fosse um certo multiplo, uma certa potencia do outro; ou, mais geralmente, que se formasse de um modo qualquer por meio deste.

Mas, esses problemas só podem ser tratados em Algebra com o auxilio da resolução das equações.

Póde-se vêr nesse facto uma nova justificação da seguinte nota de A. Comte: Cada questão resolvida torna-se o ponto de partida de uma infinidade de outras, cada vez mais difficeis, mas tambem cada vez menos uteis. (P. Laffitte.— *Calcul Arithmétique*).

Na impossibilidade de conhecer immediatamente o divisor e, portanto, o quociente buscado, póde-se entretanto tentar obtel-o substituindo a divisão total do numero proposto por uma serie de divisões parciaes pelos factores primos que porventura contiver. Em uma palavra, póde-se ensaiar a decomposição do numero proposto em seus factores primos, afim de obter por meio deste a sua raiz quadrada.

Ora, si os factores desta raiz fossem conhecidos, bastaria evidentemente duplical-os para ter o quadrado proposto, caso este represente uma segunda potencia exacta.

Portanto, decomposto o numero dado em seus diversos factores primos, bastará tomar metade de cada especie desses factores para obter a sua raiz quadrada.

Assim, por exemplo, no numero 2250000 que é igual ao producto da quarta potencia de 2 pela segunda potencia de 3 e pela sexta potencia de 5, a raiz quadrada será expressa pelo producto da segunda potencia de 2 por 3 e pela terceira potencia de 5, o que fornece 1500.

Comprehende-se, porém, que similhante processo não é geral, porquanto não póde ser applicado a numeros primos, nem tão pouco aos não primos que sómente contiverem factores differentes, isto é, não repetidos, como por exemplo 221, que se decompõe nos factores 13 e 17. (31b).

Todavia, além de sua utilidade logica, elle offerece a vantagem de nos evidenciar a constituição da raiz quadrada por meio dos factores primos que porventura compuzerem o numero proposto. Suppondo este uma segunda potencia perfeita, vimos com effeito que sua raiz quadrada deve formar-se da metade do numero daquelles factores.

(31b) Poder-se-ia pensar que a determinação approximada das raizes desses factores daria um producto equivalente á raiz quadrada de 221. Mas é facil de vêr que similhante meio está longe de produzir uma approximação conveniente.

Generalisando esta apreciação seremos levados a concluir que as terceira, quarta e quinta.... potencias de um numero inteiro, conterão respectivamente 3, 4 e 5....vezes o numero de factores primos da sua raiz ; de sorte que esta conterá reciprocamente a terça, a quarta, a quinta.... partes daquelle numero.

Vê-se, deste modo, que na constituição de uma potencia qualquer figuram sempre os mesmos divisores primos da respectiva raiz, achando-se apenas repetidos tantas vezes quantas são indicadas pelo gráo da mesma potencia.

De sorte que *todo o divisor primo de uma potencia é sempre divisor de sua raiz e reciprocamente.*

A analogia da extracção da raiz quadrada com a divisão não impede uma distincção radical entre as duas operações, quanto ao resultado de ambas.

Assim, nós vimos que na divisão é sempre possivel exprimir exactamente o quociente, não por um só numero, mas pela combinação de dois numeros ; ao passo que é facil de reconhecer que, na generalidade dos casos, a raiz quadrada não póde ser determinada senão approximadamente.

410.— A CONCEPÇÃO DOS NUMEROS INCOMMENSURAVEIS. — Qualquer numero inteiro elevado ao quadrado produz um numero inteiro, e qualquer fracção nas mesmas condições produziria tambem uma fracção. De sorte que todo o numero inteiro que não é quadrado perfeito não póde ter para raiz nenhum numero exacto, nem inteiro, nem fraccionario.

E veremos que mesmo entre as fracções, aquellas cujos termos não forem quadrados perfeitos, não terão raiz exacta.

Entretanto, é facil de reconhecer que, seja qual fôr o valor que se supponha a um numero, elle póde ser considerado como representando a area de um quadrado.

Desta arte percebe-se que o problema da extracção da raiz, concretamente encarado, é um problema que comporta solução exacta.

E' o que a Geometria directamente mostra, indicando-nos a marcha a seguir para a determinação concreta do lado. Mas esse lado não póde ser expresso pelo módulo linear adoptado, e com o qual se fórma o módulo superficial. E' essa impossibilidade concreta que a impossibilidade abstracta traduz.

As grandezas que não se podem exprimir por meio de outras, ou mediante um numero inteiro, ou mediante um numero fraccionario chamam-se *incommensuraveis*.

A consideração das grandezas *incommensuraveis* veio dar á noção de numero o seu extremo grau de abstracção.

Originados para marcar a jerarchia, elles passaram a designar as pluralidades e depois as grandezas continuas, assimiladas áquellas, mediante a escolha de um certo módulo O desenvolvimento do calculo theocratico mostrou depois que em geral os diversos gráos das grandezas continuas não podiam ser representadas mediante um módulo dado, empregando um unico numero. Surgiram então as fracções. Porém, ainda os gráos das grandezas foram representados pelo módulo convencionado, empregando para isso dois numeros. Agora acabamos de reconhecer a insufficiencia de tal recurso.

Assim, imaginemos um quadrado cujo lado tomamos para módulo, e supponhamos que a area deste quadrado cresça por gráos tão pequenos quanto se queira.

Obteremos assim uma serie de quadrados cujas areas poderemos escolher de modo a que sejam representados por uma fracção da area modular, ou um multiplo inteiro dessa area. A cada uma dessas areas corresponderá um lado preciso, e o conjuncto desses lados formará uma série crescente, isto é, elles constituirão diversos gráos successivos da

grandeza. Desses gráos, uns serão representados por fracções do módulo linear, outros por multiplos desse módulo, outros, e serão a maioria, não poderão ser expressos exactamente por inteiros nem fracção: serão *incommensuraveis*.

Pois bem, todos esses gráos diversos da grandeza, abstractamente considerada, queremos dizer, considerada sem attendermos a outros attributos de que possam gozar as linhas de que se trata, é o que constitue um *numero* na sua accepção mais geral.

De sorte que *um numero é a concepção abstracta dos diversos grãos de que é susceptivel um ser ou um phenomeno, quando não se considera nelle senão o facto de poder crescer ou diminuir*. Esses diversos gráos não nos podem ser exactamente representados independentemente de um dos phenomenos a que elles estejam ligados. Esses phenomenos podem ser abstractos ou concretos.

Assim, por exemplo, se prova em Geometria que $\sqrt{2}$ é a representação exacta de um gráo incommensuravel das grandezas continuas.

Nem sempre a representação é tão simples, como havemos de vêr.

Cumpre, além disso, notar que ha numeros incommensuraveis de muitas especies e que não podem entrar umas nas outras, senão mediante combinações mais ou menos complicadas, conforme veremos no Calculo Algebrico.

Estudando esta theoria verificaremos que os numeros inteiros não sendo em sua maioria potencias perfeitas, a extracção de suas raizes não nos póde conduzir nem a numeros inteiros, nem a numeros fraccionarios ; e que quasi sempre teremos de praticar operações como as indicadas symbolicamente em Algebra por $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{11}$, $\sqrt[6]{13}$ etc.

Em geral, todas as raizes dos numeros que não são potencias perfeitas do mesmo gráo se acham nas mesmas condições,

Por uma extensão da idéa ligada á palavra numero, se diz que estas raizes são *incommensuraveis* ou *irracionaes*. Se bem que estas palavras sejam, com razão, ordinariamente empregadas como synonymas, cumpre notar que esta synonymia não é puramente verbal, mas o resultado de um accôrdo entre o ponto de vista abstracto e o ponto de vista concreto.

A palavra *irracional*, é aqui empregada no sentido de *inexprimivel*, (31c) porque, de facto, refere-se aqui a determinação de valores que se concebem, mas que em rigor não se exprimem numericamente. Traduz portanto um facto puramente abstracto.

A palavra *incommensuravel* tem, ao contrario, um sentido concreto, porque, conforme sua accepção etymologica, lembra *uma grandeza que não tem uma medida commum com a unidade ou módulo.*

Ora, a *razão* de duas grandezas, resultado de sua mutua comparação, sendo em geral expressa quer por numeros inteiros, quer por numeros fraccionarios, comprehende-se a possibilidade de harmonisar as duas palavras; porque então a palavra *irracional* serve para traduzir o resultado de uma medida que não póde ser expressa rigorosamente, nem por inteiros, nem por fracções.

Uma grandeza é racional ou irracional conforme ella é commensuravel ou incommensuravel com a que lhe serve de unidade de medida.

Uma grandeza racional se exprime por um numero inteiro ou por um numero fraccionario; uma grandeza irracional não póde ser expressa exactamente por um numero inteiro, nem por um numero fraccionario.

(31c) O adjectivo *exprimivel*, da etymologia grega, significa ao mesmo tempo *palavra* ou *verbo* e *razão*. Os latinos, tomando erradamente a ultima accepção, a traduziram pela palavra *racional*, donde *irracional* para designar um facto inexprimivel.

Na medida directa das grandezas é impossivel por causa da imperfeição dos nossos sentidos e dos nossos instrumentos de medida, verificar se uma grandeza é ou não rigorosamente commensuravel; porque, depois de um numero limitado de subdivisões successivas da unidade, se chega necessariamente a partes imperceptiveis, e, por conseguinte, inapreciaveis.

Como toda a medida experimental é sempre approximada, torna-se finalmente impossivel reconhecer por medidas directas de duas grandezas da mesma especie, si são ou não commensuraveis; mas a medida indirecta, estabelecida pelas nossas theorias, fornece a prova directa da incommensurabilidade de uma multidão de grandezas.

No estudo de todos os phenomenos encontra-se a cada passo grandezas incommensuraveis.

Por exemplo, demonstra-se em Geometria que a diagonal de um quadrado, tomando para unidade o comprimento do lado, é expressa por $\sqrt{2}$; ora, 2 não sendo uma segunda potencia exacta, resulta que a diagonal é incommensuravel com o lado.

Demonstra-se ainda que a diagonal do cubo, quando se toma para unidade o comprimento da sua aresta, é expressa por $\sqrt{3}$; ora, 3 não sendo segunda potencia exacta, a diagonal do cubo é incommensuravel com a aresta.

Comtudo, no ponto de vista pratico, veremos que os numeros incommensuraveis são determinados por meio de dois numeros sufficientemente proximos e que o comprehendem. O gráo de approximação é medido pelo conjuncto das conveniencias humanas.

411. — DETERMINAÇÃO ESPONTANEA DA RAIZ QUADRADA, MEDIANTE O USO DA ESCALA ARITHMETICA, OU DAS OPERAÇÕES ANTERIORES. — Caracterisado assim o problema da raiz quadrada, vejamos como elle póde ser resolvido.

Pelo que precede, vê-se que a solução precisa é rarissimas vezes conseguivel. Donde se infere que a operação deve consistir, quando é systematicamente instituida, em poder-se calcular a raiz quadrada com uma approximação determinada.

Mas o espirito da operação consiste em fazer recahir todos os casos na extracção da raiz quadrada dos numeros inteiros e sem erro de uma unidade. Isto posto, é facil de vêr que o problema comporta solução servindo-nos da escala arithmetica ou das operações fundamentaes.

Chegados, porém, a esse ponto, qualquer processo não póde ser empregado machinalmente; somos levado naturalmente a servirmo-nos das luzes geraes adquiridas, para simplificar a nova avaliação.

Assim, nada mais natural e mais facil do que pensar em determinar, em primeiro lugar, entre que *potencias* da base fica comprehendida a raiz. Para isso basta determinar entre que potencias da base fica o numero.

Obtidos esses limites, a raiz com o erro menor do que uma unidade, póde ser obtida por tentativas, servindo-nos da escala numerica.

Basta para isso tomar um numero comprehendido entre os limites assignalados e percorrer depois delle tantos trechos analogos da escala numerica quantas forem as unidades que elle contiver. Si esse percurso fôr possivel sem chegar ao numero proposto, é evidente que o numero escolhido é menor que a raiz. Si antes de esgotar-se o trajecto projectado chegar-se ao numero dado, o numero escolhido será maior que a raiz. Obtem-se, pois, desta arte um novo limite superior ou inferior da raiz, que combinado com um dos anteriores indicará o novo ensaio conveniente. E as tentativas continuarão até chegar-se a dois numeros consecutivos que comprehendam a raiz pedida.

Supponhamos, por exemplo, que se quer extrahir a raiz quadrada de 235.

Este numero fica comprehendido entre 100 e 1000 e a sua raiz quadrada entre a raiz quadrada de 100 e a de 1000.

Ora, a raiz quadrada de 100 é 10; mas 1000 não é quadrado perfeito e portanto sua raiz quadrada não é immediatamente indicada.

Mas vê-se que essa raiz é muito menor que 100, pois que o quadrado de 100 já é 10000. Portanto, a raiz pedida será menor que 100; ella ficará, pois, entre 10 e 100. Isto posto tome-se um numero entre estes limites, por exemplo 30; e percorra-se trinta secções da escala numerica iguaes a 30. Antes de percorrer a decima primeira secção se reconhecerá que a raiz é menor que 30, porque já se encontrará um numero maior que 235.

Conclue-se que a raiz é menor que 30, que se tornará um novo limite superior, que substituiremos a 100. Escolhamos, pois, um numero entre 10 e 30, 20 por exemplo, e percorram-se vinte secções da escala numerica iguaes a 20. Antes de percorrer a decima quarta secção, reconhecer-se-ha que 20 é maior do que a raiz. Portanto o algarismo mais elevado da raiz é 1.

Tome-se um numero entre 10 e 20, 13 por exemplo, e percorram-se treze secções iguaes a 13. Reconhecer-se-ha que a raiz é maior do que 13. Ella ficará, pois, entre 13 e 20.

Tomemos 15; reconhecer-se-ha que é ainda menor do que a raiz.

Só nos resta ensaiar 16, que reconhecer-se-ha ser maior.

A raiz pedida fica, pois, entre 15 e 16.

Esse processo é evidentemente impraticavel, por pouco que os numeros sejam consideraveis, não só pelo tempo que consome, mas tambem pelos enganos de contagem. Mas elle póde ser substituido pela addição ou pela subtracção.

Pela addição. — Determinados os limites da raiz, e escolhido um numero entre elles, ensaia-se sommando esse numero comsigo mesmo igual numero de vezes.

Reconhece-se, assim, si o numero escolhido é maior ou menor do que a raiz. Em qualquer das hypotheses elle fornecerá um novo limite que se substituirá a um dos precedentes. E continuar-se-ha a operação até encontrar dois numeros consecutivos que sommados comsigo o mesmo numero de vezes, produzam duas sommas entre as quaes fique o numero dado.

Pela subtracção.—Determinados os limites, subtrahe-se do numero proposto o numero escolhido entre elles, tantas vezes quantas unidades contiver esse numero escolhido.

A operação permittirá, assim, achar um novo limite mais proximo do que um dos precedentes. E prosegue-se a operação até chegar a dois numeros consecutivos que comprehendam a raiz.

Qualquer desses processos é quasi tão impraticavel como a contagem, e pelos mesmos motivos. Porém elles podem ser vantajosamente substituidos pela multiplicação e pela divisão.

Pela multiplicação. — Escolhido um numero entre os limites, multiplica-se esse numero por si mesmo.

Reconhece-se logo si elle é maior ou menor que a raiz. Elle fornecerá, pois, um novo limite mais approximado da raiz.

Isto permittirá organisar um novo ensaio, que conduzirá a outros até se acharem dois numeros consecutivos, cada um dos quaes multiplicado por si mesmo dê um producto respectivamente maior ou menor que o numero proposto.

Pela divisão.—Os ensaios são mais rapidos, porque a necessidade de achar um quociente igual ao divisor permitte suspender cada ensaio sem fazer differentes operações.

412.—EXAME DA INSUFFICIENCIA PRATICA FINAL DESSES PROCESSOS. NECESSIDADE DE UM PROCESSO MAIS SYSTEMATICO.—Emfim, apezar de sufficientemente exequivel em

muitos casos, a determinação da raiz pela multiplicação e mesmo pela divisão torna-se em breve fastidiosa. As necessidades praticas fazem desejar um processo mais rapido baseado em uma melhor instituição dos ensaios.

O exemplo da divisão leva a procurar conseguir neste caso, como nos precedentes, a determinação da raiz pelo conhecimento dos seus algarismos successivos, examinando as partes do quadrado de que elles successivamente dependem.

Tal é o objectivo da operação systematica em cuja explicação vamos entrar. (31d).

§ λ β' (32)

Instituição fundamental da pesquisa systematica da raiz quadrada

413. — DETERMINAÇÃO DO NUMERO DE ALGARISMOS DA RAIZ.—Como na divisão, a operação systematica deve começar determinando o numero de algarismos do quociente incognito, que é ao mesmo tempo divisor, isto é, o numero de algarismos da raiz.

Para isto basta comparar o quadrado proposto com as unidades de diversas ordens que são quadrados perfeitos. Pois que, cada numero ficando entre duas unidades de ordens successivas, tomadas entre as que são quadrados perfeitos, a raiz de um numero qualquer ficará entre duas unidades compostas de ordens consecutivas.

Desde então, o numero de algarismos da raiz é igual ao numero de algarismos desse limite inferior della.

(31d) Notas do curso do cidadão R. Teixeira Mendes.
(32) Numero *triákõnta kai duo...* (trinta e dois).

DIDEROT

Assim, por exemplo, 235 achando-se comprehendido entre 100 e 1000, sua raiz quadrada será necessariamente menor do que a de 1000, e terá por conseguinte um numero de algarismos igual ao da raiz quadrada de 100, isto é, dois algarismos.

Examinando, porém, o modo pelo qual se obtem as unidades compostas que são quadrados perfeitos, se reconhece que todas ellas contêm um numero par de zeros. Isto é, ellas têm um numero impar de algarismos, sendo representadas pelo symbolo da unidade seguida de zeros em numero par.

A raiz desses quadrados tendo a metade dos seus zeros, terá um numero impar de algarismos, quando essa metade fôr par; e um numero par, quando essa metade fôr impar.

Assim, 10000 tendo um numero par de zeros é quadrado perfeito, e a sua raiz será representada por 1 seguido de metade dos zeros, isto é, de dois zeros. E como essa metade é par, a raiz de 10000 terá um numero impar de algarismos. Igualmente 1000000 será quadrado perfeito, e sua raiz será representada pelo symbolo da unidade seguido de metade dos zeros, isto é, tres zeros; e como essa metade é impar, a raiz de 1000000 terá um numero par de algarismos.

Isto posto, dado um numero, a unidade composta quadrado perfeito que lhe serve de limite inferior devendo ter sempre um numero impar de algarismos, só terá o mesmo numero de algarismos que elle, si esse numero fôr impar.

Mas, si o numero de algarismos do numero proposto fôr par, a unidade composta quadrado perfeito que lhe serve de limite inferior terá um algarismo de menos.

Assim, em resumo, o limite inferior que estamos considerando terá o mesmo numero de algarismos que o numero proposto ou um algarismo de menos. E a raiz desse

limite tendo sempre um numero de algarismos igual a metade dos zeros mais um, terá um numero de algarismos que se chama metade por excesso do dito limite.

Vê-se por ahi que, si o numero proposto tiver numero par de algarismos, o seu limite inferior tendo um algarismo de menos, a sua raiz (que deve ter o mesmo numero de algarismos da raiz desse limite) terá um numero de algarismos precisamente metade.

Mas, si o numero proposto contiver numero impar de algarismos, o seu limite inferior tendo o mesmo numero de algarismos, a sua raiz (que deve ter o mesmo numero de algarismos da raiz desse limite) terá a metade por excesso. (32a).

414.— IMPORTANCIA FUNDAMENTAL DO CASO EM QUE A RAIZ TEM DOIS ALGARISMOS.— Isto posto, si a raiz só tem um algarismo, esta póde ser immediatamente determinada, pois que é facil reter os quadrados dos nove primeiros numeros previamente instituidos pela tabella theocratica da multiplicação. Este pequeno quadro já nos mostra quaes as raizes de um algarismo dos numeros inteiros que são quadrados perfeitos.

Mas, quando a raiz tem dois algarismos, a sua determinação começa a exigir uma operação systematica.

Segundo o espirito geral do Calculo Arithmetico, patenteado pelas operações fundamentaes, essa operação systematica deve consistir em fazer recahir a avaliação de qualquer raiz no caso em que a raiz só tem um algarismo, por ser inferior a 10.

Para conseguil-o basta realizar tal reducção para o caso em que a raiz tem dois algarismos; e depois reduzir um caso qualquer a este.

(32a) Dahi se deduz, portanto, que o quadrado de um numero inteiro tem o dobro dos algarismos da sua raiz, ou esse dobro menos um, conforme é par ou impar o numero de seus algarismos.

Ora, a primeira reducção é que constitue a difficuldade essencial da operação. Porque ella depende de saber-se de um modo geral como as duas parcellas de uma somma influem no quadrado da somma.

Para bem ajuizar da difficuldade de tal problema, convém notar que elle não depende em coisa alguma da grandeza das parcellas.

Partindo da noção do quadrado, como o producto de dois factores iguaes, o problema que consideramos não muda essencialmente, si suppuzermos que cada factor é uma somma de duas parcellas, quando as parcellas forem grandes ou forem pequenas. Porque, em qualquer caso, a questão exige para ser resolvida que tenhamos a inspiração de examinar a combinação das *relações*, sem nos preoccupar com os seus valores.

Tomemos, por exemplo, o quadrado de 23, numero que a numeração decompõe espontaneamente em duas parcellas : 20 e 3; isto é, 2 dezenas e 3 unidades. A difficuldade de descobrir como os algarismos das dezenas e das unidades respectivamente influem no quadrado consiste em examinar o producto da somma *2 dezenas e 3 unidades, pela somma 2 dezenas e 3 unidades*, sem nos preoccupar com os valores, attendendo só ás *relações*.

Assim, pela multiplicação nós teriamos que multiplicar as unidades do multiplicador pelas unidades e pelas dezenas do multiplicando; e depois as dezenas do multiplicador pelas unidades e dezenas do multiplicando, sommando finalmente o conjuncto dos productos parciaes obtidos.

Ora, nesses productos acham-se unidades de differentes ordens, e o ponto de vista arithmetico faz-nos preoccupar com o valor destas unidades, sem attender a sua origem ; ao passo que o nosso intuito é conhecer a influencia das parcellas dos factores sobre a constituição do producto. E' preciso discriminar os productos parciaes, separando nu-

meros que o ponto de vista dos valores nos levaria a reunir.

Vê-se, pois, que a difficuldade consiste em fazer prevalecer o ponto de vista da relação sob o ponto de vista do valor. É essa difficuldade é a maior que temos encontrado até aqui.

Admittindo-se porém que occorresse tal inspiração, vê-se immediatamente que ella implica á abstracção da grandeza dos factores. E portanto, o resultado a que chegassemos tanto se applicaria quando as duas parcellas de cada factor fossem representadas por um algarismo, como quando fossem representadas por muitos.

Cumpre, finalmente, observar que a difficuldade não consiste propriamente em effectuar as combinações das relações, abstrahindo dos valores, mas sim, em ter similhante inspiração.

O conjuncto das operações anteriores não bastaria, na evolução espontanea, para suggeril-a, si o ponto de vista geometrico não tivesse intervido.

415. — Da inspiração geometrica da lei que exprime a influencia das parcellas de uma somma sobre o quadrado desta. — Mas a avaliação da área do quadrado, que tinha suggerido a noção de raiz quadrada, forneceu immediatamente a solução da difficuldade que estamos considerando.

Com effeito, desde que se sentiu a vantagem de determinar successivamente os dois algarismos da raiz, os theocratas foram levados a examinar como as duas partes em que o lado do quadrado se decompunha concorriam para a formação da área. Desde então, contando de um mesmo vertice as partes similares de cada lado, e tirando pelo ponto de divisão de um lado, rectas parallelas ao contiguo, a lei que buscavam lhes ficou patente.

O quadrado da somma decompoz-se em dois quadrados, tendo respectivamente para lados as duas parcellas, e em dois rectangulos iguaes, tendo para lado essas parcellas.

Assim, no caso de um numero composto de dois algarismos, *o quadrado do numero tornava-se igual ao quadrado das unidades, mais o quadrado das dezenas, mais o dobro do rectangulo das dezenas e das unidades.*

Esta lei *geometrica* não tardou em ser confundida pelo calculo numerico, desde então facilmente instituido, fazendo prevalecer o ponto de vista das relações sobre o dos valores.

416. — EXAME DA APTIDÃO DESSA LEI PARA EFFECTUAR A DUPLA REDUCÇÃO ACIMA APONTADA. — A applicação dessa lei vem logo patentear a possibilidade de reduzir um caso qualquer ao caso em que a raiz só tem dois algarismos. Porque, desde que a raiz tenha muitos algarismos, póde ser considerada como composta de dezenas e unidades, estas reduzidas ao algarismo das unidades e as dezenas ao conjuncto dos outros.

Mas, o quadrado das dezenas dá centenas; portanto não póde affectar os dois primeiros algarismos das unidades inferiores do quadrado.

Logo, para achar as dezenas da raiz, podemos abstrahir desses dois algarismos, e procurar a raiz quadrada do maior quadrado contido no conjuncto das centenas do quadrado proposto.

Somos assim levados a procurar a raiz quadrada de um numero, de dois algarismos menos do que o numero proposto. O facto desse numero indicar centenas não acarreta nenhuma difficuldade nova; porque as avaliações não dependem das unidades.

O numero de algarismos da nova raiz determina-nos a podermos consideral-a, igualmente, como composta de dezenas e unidades. E o mesmo raciocinio nos levaria a separar ainda os dois algarismos das unidades inferiores.

Applicando-se essas separações successivas, chegar-se-hia afinal a um numero cuja raiz só tivesse dois algarismos.

420.— RAIZ QUADRADA DE DOIS ALGARISMOS; SUA EXTRACÇÃO. — Cumpre-nos, pois, reconhecer a marcha a seguir para determinar os dois algarismos de uma raiz, que não contém senão esses dois algarismos.

O numero proposto deve ter, pelo menos, tres algarismos, e no maximo terá quatro.

Supponhamos que o quadrado dado tem quatro algarismos: Separados os dois das unidades inferiores, extrahe-se a raiz quadrada das centenas; isto é, procura-se o maior quadrado contido nas centenas, e a raiz desse maior quadrado será o algarismo das dezenas da raiz.

Isto posto, para ter o segundo algarismo basta experimentar successivamente os nove numeros simples. Isto é, eleva-se successivamente ao quadrado os nove numeros que correspondem á combinação do algarismo achado das dezenas com os nove primeiros grupos de unidades.

Esses ensaios são um pouco fastidiosos; mas elles comportam duas abreviações:

Primeira abreviação. — Subtrahindo dos dois primeiros algarismos do numero o maior quadrado nelles contido, o resto formará com os algarismos provisoriamente afastados um numero que encerrará o dobro do rectangulo das dezenas pelas unidades e o quadrado das unidades.

Ora, o dobro do rectangulo das dezenas pelas unidades dá pelo menos dezenas; de sorte que elle não póde affectar o algarismo das unidades de tal *resto*. Mas, como o quadrado das unidades póde dar dezenas, as dezenas do resto podem provir tambem dessa origem.

Em resumo, as dezenas do resto conterão exclusivamente o dobro das dezenas pelas unidades; ou conterão esse duplo rectangulo, mais o quadrado das unidades. Donde se segue que, separando o algarismo das unidades do resto, e dividindo o conjuncto dos outros pelo dobro das dezenas, obteremos para quociente um algarismo que será o das

unidades da raiz, ou indicará numero maior. Isto é, teremos um limite superior do algarismo das unidades.

Isto posto, para verificar-se de qual dos casos se trata, eleva-se ao quadrado a raiz formada pela combinação do algarismo das dezenas com esse limite. Para isto, basta sommar o quadrado das dezenas e dobro das dezenas pelo limite, com o quadrado desse limite.

Segunda abreviação. — A segunda abreviação é inspirada directamente pela Geometria. Porque, depois de subtrahido do quadrado proposto o quadrado das dezenas, o conjuncto do quadrado das unidades e dos dois rectangulos das dezenas pelas unidades, podem ser dispostos de modo a formar um só rectangulo, tendo para lados as unidades, e a somma das unidades com o dobro das dezenas.

Isto posto, é claro que, para sommar as unidades com o dobro das dezenas, basta escrever o algarismo dellas ao lado dos que indicam esse dobro.

E desde então, multiplicando as unidades pelo numero assim formado, deve-se obter um numero igual ou menor que o resto. (32b).

421.— O CALCULO NO CASO EM QUE A RAIZ QUADRADA TEM DOIS ALGARISMOS. — Para melhor comprehender o que fica dito, supponhamos que se trata de obter a raiz quadrada de 564.

Este numero tendo mais de dois e menos de cinco algarismos, a sua raiz quadrada será maior do que 10, e menor do que 100, e por conseguinte compor-se-ha de dois algarismos.

A raiz procurada conterá, pois, dezenas e unidades; e no numero 564 ha de se encontrar o quadrado das dezenas, o dobro do producto das dezenas pelas unidades, e mais o quadrado das unidades de sua raiz.

(32b) Notas do curso do cidadão R. Teixeira Mendes.

Para obter o algarismo das dezenas da raiz, vejamos como é possivel assignalar no numero 564 a parte que encerra o quadrado das dezenas da sua raiz: Devendo o quadrado das dezenas produzir pelo menos centenas, é evidente que não póde achar-se nas 64 unidades daquelle numero.

O quadrado das dezenas da raiz achar-se-ha, pois, comprehendido nas 5 centenas do numero 564, as quaes podem além disso conter algumas centenas de reserva, provenientes das duas outras partes do quadrado, a que acima alludimos.

Ora, achando-se no numero 5 o quadrado das dezenas da raiz procurada, é claro que extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado, 4, nelle contido, o resultado obtido, 2, não poderá ser menor que as dezenas da mesma raiz. (Tambem não poderá ser maior; porque o numero dado, achando-se comprehendido entre 400 e 900, terá evidentemente uma raiz menor do que a deste ultimo, que é 3 dezenas).

Isto posto, si do numero subtrahirmos 4, que é o quadrado das dezenas obtidas para a sua raiz, o resto conterá apenas a segunda e a terceira partes do quadrado, isto é, *o dobro das dezenas pelas unidades e o quadrado das unidades.*

Ora, si podermos assignalar neste resto, 162, a primeira dessas duas partes, é claro que dividindo-a pelo dobro das dezenas da raiz, determinaremos as unidades da mesma raiz. E' o que conseguiremos facilmente, observando que o *dobro das dezenas pelas unidades produz pelo menos dezenas*; e que, portanto, essa segunda parte só póde achar-se nas 16 dezenas daquelle resto, as quaes poderão conter tambem algumas de reserva, provenientes do *quadrado das unidades da raiz.*

Logo, separando o ultimo algarismo, 2, á direita do resto, e dividindo as 16 dezenas restantes por 4, dobro das dezenas

da raiz, obteremos um quociente 4 que, si não fôr as unidades da raiz, não poderá ser um numero menor.

Para verificar si é maior, o meio que espontaneamente se offerece consiste em formar o quadrado da raiz obtida, 24, e comparar com o quadrado proposto, o resultado achado.

Póde-se, todavia, simplificar essa verificação, attendendo que 4 é uma parte do quadrado da raiz que já está subtrahida do numero proposto, e que, portanto, bastará subtrahir do resto 162 a somma das duas outras partes. Formamol-a facilmente, escrevendo o algarismo 4 das unidades á direita do que exprime o dobro das dezenas e multiplicando-o pelo numero resultante; isto é, 44 por 4, o que produz 176. Este numero sendo maior que 162, é evidente que 4 é um algarismo muito forte; o que se explica pela existencia de reservas que, provindo do quadrado das unidades, se accumulam no duplo producto das dezenas pelas mesmas unidades.

Tomando por isto o algarismo 3, para representar as unidades da raiz, verificamos ser elle conveniente; porque o producto de 43 por 3 é 129, que póde ser subtrahido de 162.

A existencia do resto, 33, indica que o numero proposto não é um quadrado perfeito; de modo que 562 é igual ao quadrado de 23, mais 33, sendo, pois, 23 vezes 23 o maior quadrado nelle contido.

Eis o typo do calculo, que fazemos tambem no systema septimal, onde vê-se que o mesmo numero é ahi um quadrado perfeito:

```
 5.6 2  |23                 5.6 2  |23
 4      |4    43            4      |4    43
 1 6.2         3            1 6.2         3
 1 2 9       129            1 6 2       162
 0 3 3                      0 0 0
```

Póde acontecer que, ao effectuar a divisão para achar as unidades da raiz, obtenha-se para quociente um numero igual ou maior que 10.

Como as unidades da raiz so podem ser expressas por numeros simples, deve-se neste caso tomar 9 para quociente, e diminuil-o successivamente de uma unidade, até obter o numero conveniente.

Póde, porém, succeder que o receio de escrever um algarismo muito forte nos leve a tomar um outro muito fraco, para as unidades da raiz.

Para prevenir isso, supponhamos, por ex., que a raiz achada seja mais fraca de uma unidade. Neste caso, é evidente que o numero proposto deverá conter, não o quadrado dessa raiz, mas sim o que se obteria augmentando-a de uma unidade; isto é, *o quadrado da raiz achada, mais o dobro dessa raiz, mais uma unidade*. (32c).

Portanto, nesta hypothese, quando se tiver subtrahido o quadrado da raiz achada, o resto deverá ser igual ao dobro dessa raiz mais um; si não fôr maior, devido ás reservas que porventura encerrar.

Assim, pois, para que o algarismo das unidades não seja fraco, é indispensavel que o resto seja inferior ao dobro da raiz augmentada de uma unidade.

Póde-se verificar as reflexões precedentes extrahindo a raiz quadrada do numero 1525; si depois de obter o algarismo 3 das dezenas, tomarmos 8, em vez de 9, para o das unidades.

De tudo que precede conclue-se que no caso da raiz procurada ter dois algarismos, a sua extracção reduz-se facil-

---

(32c) Porque a differença entre os quadrados de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor augmentado de uma unidade. Tendo, por ex., o quadrado de 3, que é 9, formando em seguida o de 4 ou 3 mais 1, acha-se para este 9 mais 2 vezes 3 mais 1. Tomando a differença entre os dois resultados, obtem-se 2 vezes 3 mais 1; isto é, o dobro do menor mais um.

mente á uma outra de um só algarismo, que póde sempre ser obtida pelo processo espontaneo.

422. — Tendo a raiz um numero qualquer de algarismos, é sempre possivel reduzir a operação ao caso da extracção de dois algarismos da raiz, de onde todos os outros resultam gradativamente.

Para melhor comprehender a extensão da operação ao caso em que a raiz tem mais de dois algarismos, procuremos extrahir a raiz quadrada de 65124901, a qual, como sabemos, deve ter quatro algarismos.

Podemos consideral-a como formada de dezenas e unidades, estas reduzidas ao algarismo das unidades, e aquellas ao conjuncto dos outros.

Mas, o quadrado das dezenas dando pelo menos centenas, não póde achar-se nos dois ultimos algarismos do quadrado proposto. Logo, para determinar as dezenas da raiz, podemos separar esses dois algarismos e procurar a raiz quadrada do maior quadrado contido no conjuncto das 651249 centenas do numero considerado.

Somos assim levados a procurar a raiz quadrada de um numero de dois algarismos menos do que o proposto. O facto desse numero indicar centenas não acarreta nenhuma difficuldade nova; porque as avaliações não dependem da especie das unidades.

Mas, a raiz quadrada de 651249 devendo ter tres algarismos, podemos igualmente consideral-a como composta de dezenas e unidades.

Ora, o mesmo raciocinio feito precedentemente nos leva a separar ainda os dois ultimos algarismos de 651249, e a extrahir a raiz quadrada do numero formado pelo conjuncto dos restantes, isto é, de 6512.

Emfim, a raiz quadrada deste numero tendo apenas dois algarismos, só nos resta, para determinal-a, applicar a marcha do caso precedente.

Eis o typo do calculo ao lado do qual apresentamos um outro no systema septimal:

```
6 5.1 2.4 9.0 1  |8070          2 1.4 5.0 4 | 365
6 4              |1607          1 2         | 66   1055
0 1 1.2 4.9      |   7          0 6 4.5     |  6      5
  1 1 2 4 9       11249           5 6 1     561    5404
0 0 0 0 0 0.1                     0 5 4 0.4
                                    5 4 0 4
                                    0 0 0 0
```

Extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 6512, como fizemos no exemplo precedente, acha-se 80.

Reunindo ao resto, 112, as 49 unidades de segunda ordem, obtemos 11249, que tem as duas outras partes do quadrado 651249, a saber: *dobro das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades*. Ora, o dobro das dezenas pelas unidades produzindo pelo menos *dezenas*, não póde achar-se senão nas 1124 dezenas do resto, 11249. Dividindo, portanto, este numero por 160, dobro das dezenas, achamos as sete unidades de segunda ordem da raiz.

Para verificar si este algarismo é o conveniente, escrevemol-o á direita de 160, dobro da raiz, e o multiplicamos pelo numero 1607, assim formado.

O producto, 1249, sendo igual ao numero considerado, nos faz reconhecer que 7 é o algarismo procurado.

E como os dois ultimos algarismos do numero proposto não formam com o resto um numero capaz de conter o dobro das dezenas da raiz, concluimos emfim que zero é o algarismo das unidades da mesma raiz.

E' portanto 8070 a raiz do maior quadrado contido no numero proposto.

Esta raiz differe da procurada em menos de uma unidade; porque formando o quadrado de 8071, obtem-se um numero maior que o proposto. Nestas condições, a raiz deste acha-se comprehendida entre 8070 e 8071, differindo de qual-

quer delles em menos de uma unidade. Como na divisão, diz-se que 8070 é uma raiz *por falta*, e que 8071 é uma raiz *por excesso.*

Prefere-se de ordinario a raiz *por falta*, em virtude do preceito logico que nos leva naturalmente a ficar áquem da realidade: quando a ultrapassamos, nunca sabemos quando convém parar.

Todavia, sob o ponto de vista abstracto, deve-se adoptar, ora a raiz *por falta*, ora *por excesso:* a primeira quando o resto da operação fôr igual ou menor do que o numero obtido para a raiz; a segunda, quando fôr maior. Procedendo por este modo, é facil de vêr que a raiz obtida differirá da verdadeira em menos de meia unidade.

Do que precede podemos, pois, deduzir a seguinte regra, para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro qualquer: *Divide-se o numero dado em classes de dois algarismos da direita para a esquerda; extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na ultima classe á esquerda, e ter-se-ha o primeiro algarismo da raiz. Eleva-se este ao quadrado, e subtrahe-se da classe considerada; á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separando o seu ultimo algarismo á direita.*

Divide-se á parte restante, a esquerda, pelo dobro da raiz achada, e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Escreve-se este algarismo á direita daquelle que serviu de divisor, multiplicando-o em seguida pelo numero assim formado; e subtrahindo o producto do numero que serviu de dividendo, seguido do algarismo separado.

Ao lado do resto escreve-se a classe seguinte, separando por um ponto o seu ultimo algarismo á direita; divide-se a parte restante, á esquerda, pelo dobro da raiz, já achada: o quociente será o terceiro algarismo da raiz pedida. Escreve-se esse algarismo á direita do numero que serviu de divisor; multiplica-se o resultado por esse mesmo

algarismo e subtrahe-se o producto do numero que serviu de dividendo seguido do algarismo separado. Ao lado do resto escreve-se a classe seguinte e procede-se como anteriormente até se terem considerado todas as classes.

Para tirar a prova da operação basta evidentemente quadrar a raiz obtida e addicionar ao producto o resto, afim de vêr se apparece o numero proposto, caso em que se suppõe certa a operação.

E' assim que formando, no exemplo anterior, o quadrado da raiz 8070, e addicionando-lhe depois o resto 1, acha-se o numero 65124901.

Mas além desta prova chamada *real*, póde-se utilizar outras, sendo a dos *noves* a mais usual.

Para effectuar esta ultima, procede-se como na divisão, isto é, tiram-se os noves da raiz; eleva-se o resto ao quadrado, e somma-se o resultado ao resto da operação. Tirando os noves desta somma o resultado deve ser igual ao resto que se obtem tirando os noves do numero dado.

Assim, no exemplo antepreccdente, acha-se 5 na raiz; juntando o seu quadrado 25 ao resto, 33, da operação, obtem-se 58. Tirando os noves deste numero, acha-se 4, resultado igual ao que se obtem tirando tambem os noves do numero dado, 562.

Observação.—Examinando o primeiro milhão de numeros da escala, apenas encontram-se mil que são quadrados, a saber: 9 entre 1 e 100, 90 entre 100 e 10000 e 900 entre 10000 e 1000000 não incluindo este numero. Proseguindo neste exame, ver-se-ha que os quadrados perfeitos vão rareando cada vez mais. (32d).

(32d) Em alguns casos póde-se á primeira vista verificar quando um numero não é quadrado perfeito, utilizando os seguintes principios, deduzidos da numeração e da propria indole da operação que nos dá a raiz quadrada :

1.º « Todo o numero inteiro, cujo ultimo algarismo da direita fôr 2, 3, 7 ou 8 não é quadrado perfeito ». Porque quando se eleva ao quadrado um numero inteiro, sómente o quadrado das unidades influe no primeiro algarismo da direita; e como dos quadrados dos numeros simples nenhum acaba

Assim, pois, a regra precedente é quasi sempre applicada á determinação approximada da raiz quadrada dos numeros; já mostrámos que o erro commettido é menor do que uma unidade. Este erro póde ser desprezado sem inconveniente quando se opéra sobre numeros muito consideraveis. Tratando-se porém de numeros pequenos, ou de fracções, é preciso leval-o em conta e reduzil-o mesmo.

E' o que faremos no paragrapho seguinte.

§ λ γ' (33)

Extracção da raiz quadrada das fracções

423. — A EXTENSÃO DA RAIZ QUADRADA AO CASO DAS FRACÇÕES. DUPLA NECESSIDADE DESSA EXTENSÃO. — Sendo

---

em qualquer daquelles algarismos, segue-se que não póde haver quadrado perfeito que nelles termine.

2.º «Todo o numero par que não fôr divisivel por 4 não é quadrado perfeito». Porque todo o numero par sendo divisivel por 2, o seu quadrado será necessariamente divisivel por 4.

3.º «Todo o numero impar que, diminuido de uma unidade, não der um resto divisivel por 4, não é quadrado perfeito». Porque o numero impar diminuido de uma unidade, torna-se par, e como tal sujeito á propriedade precedente.

4.º «Todo o numero terminado em numero impar de zeros não é quadrado perfeito». Porque o quadrado terminando em zeros, é preciso que a raiz tambem termine. Mas, multiplicando esta por si mesma, o producto tem um numero duplo de zeros, que não póde, portanto, ser impar.

5.º «Todo o numero inteiro, do qual tirando os noves, ficar de resto 2, 3, 5, 6 ou 8, não é quadrado perfeito». Porque tirando os noves dos quadrados 9, 16, 25, 36, e etc., observa-se que nenhum delles deixa de resto qualquer daquelles numeros.

6.º «Todo o numero inteiro, do qual tirando os onzes, ficar de resto 2, 6, 7, 8, ou 10, não é quadrado perfeito». Porque tirando os onzes dos quadrados 16, 25, 36, 49 e etc., observa-se que nenhum delles deixa de resto qualquer daquelles numeros.

7.º «Todo o numero inteiro, que fôr exactamente divisivel por um numero primo, sem que seja exactamente divisivel pelo quadrado desse mesmo numero primo, não é um quadrado perfeito». Porque todo o quadrado póde se decompor em seus factores primos, que são os da raiz, estando cada um delles multiplicado por si mesmo, e por conseguinte elevados a uma potencia par. E' assim que um numero divisivel por 2 ou por 3, ou por 5 e etc., que não o fôr respectivamente por 4 ou por 9, ou por 25 e etc., não será quadrado. Note-se que esta propriedade é independente do systema de numeração adoptado.

Os numeros inteiros que não estiverem comprehendidos nestes caracteres poderão ser quadrados perfeitos; mas não se segue por isso que o sejam. Muitos outros caracteres similhantes poderiam ser citados; mas, além de menos simples, não têm, como os precedentes, nenhuma utilidade pratica.

(33) Numero *triáhõnta kai tréis*... (trinta e tres).

APRENDE

o quadrado de um numero o producto desse numero por si mesmo, é evidente que o quadrado de uma fracção é igual ao quadrado do numerador, dividido pelo quadrado do seu denominador.

Assim, por exemplo, o quadrado de $\frac{2}{7}$ é $\frac{4}{49}$.

Reciprocamente, a raiz quadrada de uma fracção, cujos termos são quadrados perfeitos, deve, pois, ser igual á raiz quadrada do numerador, dividida pela raiz quadrada do seu denominador.

E' assim que a raiz quadrada de $\frac{4}{49}$ é $\frac{2}{7}$.

Quando não são quadrados perfeitos ambos os termos de uma fracção, é evidente que a sua raiz quadrada só póde ser obtida approximadamente; isto é, não existe nenhum numero inteiro, nem fracção alguma que, elevada ao quadrado, produza a fracção proposta.

Uma fracção irreductivel não póde ser raiz quadrada exacta senão de outra fracção; isto é, si um numero inteiro não fôr quadrado de um outro numero inteiro, não ha tambem fracção nenhuma que possa exprimir exactamente a sua raiz quadrada. Porque se suppuzermos que uma fracção irreductivel póde representar exactamente a raiz quadrada de um numero inteiro, seguir-se-ha que este numero inteiro será igual ao quadrado daquella fracção. Ora, a fracção dada, sendo irreductivel o seu quadrado será tambem uma fracção irreductivel (porque sendo dois numeros primos entre si, as suas potencias similhantes tambem o são (33a) e conseguintemente não póde ser um numero inteiro o quociente destas).

(33a) Isto é, não admitte tambem nenhum divisor commum, differente da unidade. Com effeito, todo divisor primo de uma potencia é divisor da sua raiz, (406 e 301).

Portanto, si as duas potencias admittirem um divisor primo commum, este dividirá tambem as suas raizes; o que é contrario á hypothese, por serem estas numeros primos entre si.

Embora na maioria dos casos não seja possivel determinar exactamente a raiz quadrada de uma fracção, póde-se comtudo proceder a similhante avaliação com o gráo de approximação que é exigido pelas nossas necessidades.

Além de satisfazer a esse *desideratum*, a extensão da raiz quadrada ao caso fraccionario offerece a vantagem de permittir a mesma avaliação approximada quanto aos numeros inteiros; porque estes podem, como vimos, tomar sempre a fórma fraccionaria.

424. — PROCESSOS ESPONTANEO E SYSTEMATICO; CASOS A CONSIDERAR. — Pelo que precede, vê-se que o processo que espontaneamente se offerece para extrahir a raiz quadrada de uma fracção, consiste em extrahir a raiz quadrada do numerador e do denominador, para depois dividir o primeiro resultado pelo segundo.

1.° Comprehende-se, porém, que similhante marcha só se torna plenamente efficaz, quando ambos os termos da fracção são quadrados perfeitos.

2.° Quando sómente o denominador é quadrado perfeito, esta marcha póde ainda ser utilisada. Com effeito, extrahindo neste caso a raiz quadrada de ambos os termos da fracção, obtem-se uma outra que, embora não represente a raiz exacta daquella, fornece uma raiz approximada. O gráo de approximação depende do denominador da fracção considerada; *sendo então igual a unidade, dividida pela raiz quadrada do mesmo denominador*.

Para fixar as idéas, consideremos por exemplo a fracção irreductivel $\frac{3}{49}$, cujo denominador é um quadrado perfeito. Extrahindo a raiz quadrada deste, que é 7, e tomando approximadamente a raiz quadrada do numerador, obtem-se a fracção $\frac{1}{7}$, que exprime a raiz procurada com a approximação de $\frac{1}{7}$.

Com effeito, como o numerador 3 acha-se comprehendido entre o quadrado de 1, que é 1, e o quadrado

de 2, que é 4, a parte inteira da sua raiz quadrada será 1. Portanto, a raiz quadrada de $\frac{3}{49}$ fica comprehendida entre as fracções $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{7}$, que differem entre si de $\frac{1}{7}$. Em verdade, sendo $\frac{1}{49}$ o quadrado de $\frac{1}{7}$ e sendo $\frac{4}{49}$ o quadrado de $\frac{2}{7}$, a fracção $\frac{3}{49}$ está evidentemente comprehendida entre $\frac{1}{49}$ e $\frac{4}{49}$; e, portanto, a raiz quadrada de $\frac{3}{49}$ acha-se comprehendida entre as raizes quadradas de $\frac{1}{49}$ e $\frac{4}{49}$, isto é, entre $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{7}$.

Dahi conclue-se que para determinar a raiz quadrada de uma fracção cujo denominador tão sómente é quadrado perfeito, *basta extrahir a raiz quadrada do maior quadrado que se contém no numerador, e dividil-a pela raiz quadrada do denominador.*

O resultado obtido differirá do justo valor da raiz em uma quantidade que será menor do que uma fracção, tendo para numerador a unidade e para denominador a raiz quadrada do denominador da proposta. O gráo de approximação sendo imposto, neste caso, pelo denominador da fracção considerada, é facil de perceber os inconvenientes desta marcha. Similhante approximação póde, com effeito, não ser sufficiente; e dahi a necessidade de um outro meio que permitta gradual-a á vontade.

3.° O numerador e o denominador não sendo quadrados perfeitos, a applicação da regra precedente nos levá naturalmente a proceder similhantemente ao que praticamos com os numeros inteiros; isto é, a extrahir a raiz quadrada do maior quadrado contido em cada um dos termos da fracção. Mas, procedendo deste modo, e procurando, por exemplo, a raiz quadrada de $\frac{2}{3}$, acharemos $\frac{1}{1}$ ou 1, resultado que não deve ser acceito; porquanto não se póde admittir que o quadrado da unidade produza uma fracção.

Ora, si estamos tão longe da verdade, é porque o erro commettido na extracção de cada raiz, embora menor que uma unidade, torna-se entretanto consideravel, si o compararmos com a pouca grandeza do numero fraccionario sobre o qual operamos. Porquanto sente-se bem que a mesma quantidade que se póde desprezar impunemente sobre um numero grande, torna-se um erro consideravel em relação a um numero pequeno.

Não podemos, portanto, nos contentar com similhante approximação.

Em resumo, quando o denominador da fracção irreductivel considerada não é um quadrado perfeito, quer o seja quer não o numerador, a marcha precedente não póde convir, por não offerecer nenhuma precisão no resultado a que conduz.

Com effeito, o denominador significando o numero de partes em que se acha a unidade dividida, e conseguintemente exprimindo a grandeza de cada uma destas, é claro que não sendo elle quadrado perfeito, a sua raiz será um numero *incommensuravel*; e não indicará, portanto, uma divisão em partes exactas da unidade, não se tendo por conseguinte uma justa idéa da grandeza expressa pela fracção obtida.

Assim, pois, é indispensavel tornar quadrado perfeito o denominador da fracção considerada, o que, sem alteral-a, se consegue espontaneamente multiplicando ambos os seus termos pelo proprio denominador.

Para fixar as idéas, tomemos, por exemplo, a mesma fracção $\frac{2}{3}$. Multiplicando ambos os seus termos por 3, obtem-se a fracção equivalente $\frac{6}{9}$, cujo denominador sendo agora quadrado perfeito, a faz comprehender no caso precedente.

Consideremos ainda a fracção $\frac{16}{27}$; empregando o mesmo artificio, isto é, multiplicando ambos os seus termos por 27,

obtem-se a fracção $\frac{432}{729}$, cuja raiz quadrada é $\frac{20}{27}$, com um erro menor do que $\frac{1}{27}$. (33b).

Podemos, pois, concluir que para extrahir a raiz quadrada de uma fracção, cujo denominador não é quadrado perfeito, *basta multiplicar ambos os seus termos pelo proprio denominador e extrahir a raiz quadrada dos termos da fracção resultante.*

Comprehende-se, porém, que tal marcha offerece um inconveniente similhante á do caso precedente, quanto ao gráo de approximação da raiz quadrada obtida. Este gráo é ainda imposto pela raiz quadrada da unidade fraccionaria correspondente á fracção transformada.

Assim, no nosso ultimo exemplo, a raiz obtida differe da verdadeira de uma quantidade menor do que $\frac{1}{7}$; porque ella se acha comprehendida entre as raizes de $\frac{16}{49}$ e $\frac{25}{49}$, isto é, entre $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{7}$, que differem entre si de $\frac{1}{7}$.

Ora, a vantagem do calculo approximado sendo exactamente permittir que graduemos a approximação, de accôrdo

(33b) Nem sempre é necessario multiplicar ambos os termos da fracção pelo seu denominador, para tornar este um quadrado perfeito. Muitas vezes basta, para isso, decompor o denominador em seus factores primos e multiplical-os simplesmente por aquelles factores que nelle não figurarem um numero par de vezes. Extrahir-se-ha em seguida a raiz quadrada dos dois termos da fracção resultante, notando que para obter a do novo denominador, bastará tomar metade do numero de cada um dos seus factores primos.

Por exemplo, para extrahir a raiz quadrada de $\frac{7}{360}$, por ser 360 igual ao producto de tres factores iguaes a 2, por dois factores iguaes a 3, por 5, póde-se simplesmente multiplicar ambos os termos da fracção proposta por 2 e por 5, isto é, por 10, o que produzirá $\frac{70}{3600}$. A raiz quadrada do numerador, sem erro de uma unidade, é 8; a do denominador obtem-se formando o producto de dois factores iguaes a 2, por 3 e por 5, o que fornece 60; de sorte que a raiz quadrada de $\frac{7}{360}$ é $\frac{8}{60}$, com approximação de $\frac{1}{60}$.

Esta marcha é sobretudo conveniente quando o denominador é um numero um tanto consideravel, desde que não seja *primo*.

Considerando ainda a fracção acima $\frac{16}{27}$, bastaria multiplicar o denominador pelo factor primo que o torna quadrado perfeito, que neste caso é 3. Obter-se-hia a fracção $\frac{48}{81}$, cuja raiz quadrada approximada é $\frac{6}{9}$ ou $\frac{1}{3}$.

E' facil de vêr, porém, que por este modo a raiz obtida é menos approximada do valor da verdadeira do que a fornecida pela marcha ordinaria.

com as nossas necessidades, concluimos emfim que esta marcha empirica deve ser substituida por uma outra que, em qualquer dos casos considerados, nos deixe a liberdade de fazel-o.

425.—RAIZ QUADRADA COM UMA APPROXIMAÇÃO DADA. — E' possivel obter a raiz quadrada de uma fracção, cujos termos não são quadrados perfeitos, com a approximação tal, que a raiz achada diffira do justo valor da sua raiz quadrada em uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Como, porém, a raiz quadrada de uma fracção depende sempre das raizes quadradas dos numeros inteiros que formam os seus termos, precisamos previamente instituir a marcha que convém seguir para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro com uma *approximação dada.*

Vimos que, quando se extrahe a raiz quadrada de um numero inteiro pelo processo ordinario, o erro commettido é menor do que uma *unidade inteira*. Tratando-se, porém, da raiz quadrada de uma fracção, dissemos que o erro commettido é menor do que a *unidade fraccionaria* correspondente ao denominador desta fracção, ou a raiz quadrada deste denominador quando se o tem tornado um quadrado perfeito.

Dahi resulta que, substituindo um numero inteiro qualquer por uma fracção ordinaria equivalente, cujo denominador seja um quadrado perfeito, a extracção de sua raiz quadrada póde ser feita com approximação da unidade fraccionaria relativa á raiz quadrada do mesmo denominador. Ora, nos sendo facultado dar áquella fracção um denominador qualquer, nada impede de fazel-o igual ao quadrado do denominador da fracção que indica a approximação pedida.

A determinação da raiz quadrada de um numero inteiro qualquer, com uma approximação dada, fica, pois,

dependendo da extracção da raiz quadrada de uma fracção equivalente, que póde sempre ser obtida multiplicando e dividindo simultaneamente o mesmo numero pelo quadrado do denominador da unidade fraccionaria que indica o erro.

Supponhamos, por exemplo, que se quer a raiz quadrada de 5, sem erro de $\frac{1}{10}$. Substituimol-o pela fracção equivalente $\frac{500}{100}$, que se obtem immediatamente multiplicando-o e dividindo-o ao mesmo tempo por 100, quadrado de 10. Extrahindo a raiz quadrada desta fracção pelo processo ordinario, obtem-se emfim $\frac{2}{10}$ para raiz procurada.

Com effeito, a raiz quadrada de 500 acha-se comprehendida entre dois numeros inteiros consecutivos, 22 e 23; portanto, a raiz procurada fica comprehendida entre esses dois numeros divididos por 10, isto é, entre $\frac{22}{10}$ e $\frac{23}{10}$; e como estas duas fracções differem entre si de $\frac{1}{10}$, a verdadeira raiz differirá de qualquer dellas em menos de $\frac{1}{10}$. De sorte que $\frac{22}{10}$ é a raiz de 5 approximada *por falta* e $\frac{23}{10}$ é a raiz do mesmo numero approximada *por excesso*: tomando uma ou outra, o erro commettido é, pois, menor que $\frac{1}{10}$.

Póde-se, portanto, construir a seguinte regra para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro, com uma approximação qualquer:

Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da unidade fraccionaria que indica a approximação; extrahe-se a raiz do producto e divide-se esta por aquelle denominador. (33c).

(33c) Ordinariamente esta regra é instituida do seguinte modo: Seja proposto, por exemplo, extrahir a raiz quadrada de 128 a menos de $\frac{1}{7}$. Si conhecessemos dois numeros fraccionarios que tivessem o mesmo denominador 7, e cujos numeradores differissem entre si de uma unidade, e, por outro lado, fosse um desses numeros fraccionarios maior, e o outro menor que a raiz quadrada de 128, é evidente que qualquer desses numeros representaria

Applicando, por exemplo, esta regra á extracção da raiz quadrada de 7 com a approximação de $\frac{1}{5}$, multiplicaremos 7 pelo quadrado de 5, isto é, 25 o que dá 175; extrahiremos a raiz quadrada deste producto, que é 13, e a dividiremos por 5, o que fornece $\frac{13}{5}$ para a raiz procurada. Si a approximação fosse dada pela fracção $\frac{1}{10}$, a raiz obtida seria $\frac{26}{10}$.

Observando a marcha seguida, nota-se que o erro commettido na radiciação do numero inteiro, produzido pela multiplicação do numerador, é sempre fixo, pois que é menor do que 1, por maior que se tenha tornado o numero proposto; mas que tal erro diminue proporcionalmente ao denominador da unidade fraccionaria que indica a approximação.

Vê-se assim que para resolver esta questão, o espirito humano recorreu a um artificio muito empregado, principalmente na medida dos angulos (*circulo repetidor*): consiste em tornar assás consideravel a grandeza a medir, afim de que o erro commettido se torne uma fracção muito pequena em relação a ella.

Nestas condições, o erro que seria consideravel para a grandeza primitiva, torna-se necessariamente uma fracção muito menor, em relação ao multiplo adoptado para substituir a mesma grandeza.

---

esta raiz quadrada com um erro menor do que $\frac{1}{7}$. Para determinarmos aquelles numeros fraccionarios, supponhamol-os existentes; e imaginemos os seus quadrados, e o numero 128, multiplicados pelo quadrado de 7, que é 49: É evidente que 49 vezes 128 ou 6272 fica comprehendido entre os quadrados dos numeradores dos numeros fraccionarios desconhecidos; e, por conseguinte, a raiz quadrada de 49 vezes 128 achar-se-ha comprehendida entre aquelles numeradores. Ora, a raiz quadrada do maior quadrado contido em 6272 é 79: logo, a raiz quadrada de 49 vezes 128 acha-se comprehendida entre 79 e 80.

São, pois, 79 e 80 os numeradores dos numeros fraccionarios que pretendiamos determinar; e $\frac{79}{7}$ e $\frac{80}{7}$ serão duas fracções, uma das quaes é maior, e outra menor do que a raiz quadrada de 128; e como a differença entre estas fracções é de $\frac{1}{7}$, segue-se que qualquer dellas differirá em menos de $\frac{1}{7}$ do justo valor da raiz quadrada de 128.

426.—EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DE UM NUMERO FRACCIONARIO COM UMA APPROXIMAÇÃO QUALQUER.— A questão recae na precedente, porquanto vimos que a extracção da raiz quadrada de uma fracção reduz-se sempre á dos numeros inteiros que formam os seus termos. Portanto, para ter a raiz de uma fracção, basta extrahir a raiz quadrada de seu numerador e do seu denominador, tomando cada uma com a approximação pedida, e dividir em seguida o primeiro resultado pelo segundo.

Assim, por exemplo, a raiz quadrada de $\frac{5}{7}$, sem erro de $\frac{1}{10}$, será igual ao quociente da raiz de 5 pela raiz de 7, tomadas ambas com a approximação de $\frac{1}{10}$.

Ora, a primeira raiz sendo, como vimos, $\frac{22}{10}$ e a segunda $\frac{26}{10}$, a divisão destas duas fracções fornecerá $\frac{22}{26}$ para a raiz de $\frac{5}{7}$, a menos de $\frac{1}{10}$.

Si um dos termos da fracção proposta fôr quadrado perfeito, é evidente que a questão se simplifica; porque só se tem de extrahir uma raiz approximada.

E' o que acontece, por exemplo, com as raizes quadradas de $\frac{7}{16}$ e de $\frac{4}{5}$, com a approximação de $\frac{1}{10}$: A primeira é igual ao quociente de $\frac{26}{10}$ por 4, isto é, a $\frac{26}{40}$; e a segunda equivale ao quociente de 2 por $\frac{22}{10}$, que é $\frac{20}{22}$.

Póde-se, em todos os casos, introduzir artificialmente similhante simplificação, tornando anteriormente o denominador da fracção um quadrado perfeito.

Assim, por exemplo, querendo-se a raiz de $\frac{5}{7}$ com approximação de $\frac{1}{10}$, póde-se multiplicar por 7 ambos os termos daquella fracção e extrahir a raiz approximada dos termos de $\frac{35}{49}$ a menos de uma unidade, o que dará $\frac{5}{7}$.

Comparando este resultado com o já obtido pelo processo precedente para a raiz quadrada da mesma fracção $\frac{5}{7}$, nota-se que o quadrado de $\frac{22}{26}$ ou de $\frac{11}{13}$ a excede em menos

de $\frac{1}{10}$, ao passo que o quadrado de $\frac{5}{7}$ lhe é inferior em uma quantidade menor do que $\frac{1}{10}$. De sorte que obtivemos por aquelle processo uma raiz approximada *por excesso;* e por este ultimo uma raiz approximada *por falta*, sendo menor do que $\frac{1}{10}$ a differença de qualquer dellas para a verdadeira.

Emfim, póde-se simplificar ainda mais a solução da questão, adoptando a marcha ordinaria, que faz desapparecer o denominador da fracção proposta, e exige apenas a extracção de uma raiz quadrada approximada.

Consiste esta em *multiplicar a fracção dada pelo quadrado do denominador da unidade fraccionaria que indica a approximação; tomar o maior numero inteiro contido nesse producto, e extrahir sua raiz quadrada a menos de uma unidade: dividindo este resultado por aquelle denominador, ter-se-ha a raiz procurada*. (33d).

(33d) Ordinariamente esta regra é instituida do seguinte modo: Supponhamos, por exemplo, que se trata de obter a raiz quadrada da fracção irreductivel $\frac{11}{19}$, com uma approximação tal, que a raiz achada differa da verdadeira em menos de $\frac{1}{7}$. Para isto, basta reflectir que, si conhecessemos duas fracções que tivessem o mesmo denominador 7, e cujos numeradores differissem entre si em uma unidade, e fosse uma de taes fracções maior, e a outra menor que a raiz quadrada de $\frac{11}{19}$, qualquer dellas representaria a raiz procurada, com um erro menor do que $\frac{1}{7}$.

Para determinar aquellas fracções desconhecidas, supponhamol-as existentes; e concebamos que ambas foram elevadas ao quadrado, e que os seus quadrados e a fracção $\frac{11}{19}$ foram multiplicadas pelo quadrado de 7 que é 49. As duas fracções desconhecidas ficarão reduzidas aos quadrados de seus numeradores, e a fracção $\frac{11}{19}$ reduzida a 11 vezes $\frac{49}{19}$: é então evidente que o valor desta ultima fracção se achará comprehendido entre os quadrados dos numeradores das fracções desconhecidas.

Ora, extrahindo os inteiros contido na fracção 11 vezes $\frac{49}{19}$ acha-se que é 28; e procurando a raiz do maior quadrado contido neste numero, encontra-se 5. Logo, 5 e 6 serão os numeradores das fracções desconhecidas, que são por conseguinte $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$ uma das quaes é maior e a outra menor que a raiz quadrada de $\frac{11}{19}$; e como a differença entre aquellas fracções é igual a $\frac{1}{7}$, segue-se que qualquer dellas differe da raiz quadrada de $\frac{11}{19}$ em menos de $\frac{1}{7}$.

Assim, por ex., para obter a raiz quadrada da mesma fracção $\frac{5}{7}$, sem erro de $\frac{1}{10}$, multiplicaremos 5 por 100, quadrado de 10, obtendo-se 500. Tomando os inteiros de $\frac{500}{7}$ acharemos 71; extrahindo a raiz quadrada deste numero e dividindo-a por 10, virá $\frac{26}{10}$ para a raiz buscada.

Com effeito, 26, raiz quadrada de 500 a menos de uma unidade, o é tambem de $\frac{500}{7}$, a menos de uma unidade; porque o quadrado de 27 excede 500 pelo menos de uma unidade, e por conseguinte é maior do que $\frac{500}{7}$. Portanto, $\frac{26}{7}$ é, sem erro de $\frac{1}{10}$, a raiz quadrada de $\frac{5}{7}$; visto como o justo valor desta se acha comprehendido entre $\frac{26}{10}$ e $\frac{27}{10}$.

Si multiplicando a fracção proposta pelo quadrado do denominador da fracção que indica a approximação, não fôr o producto uma fracção impropria, então a raiz quadrada da fracção proposta, com approximação requerida, será expressa pela propria fracção que marca tal approximação.

Acha-se por este modo que é $\frac{1}{2}$ a raiz quadrada da fracção $\frac{9}{71}$, calculada sem perda de $\frac{1}{2}$.

Pela mesma razão, será 0,001 a raiz quadrada de $\frac{3}{7457632}$ sem erro de $\frac{1}{1000}$.

Em resumo, quer se trate de numeros fraccionarios, quer de numeros inteiros, vê-se que a extracção da raiz quadrada com uma approximação qualquer póde sempre ser feita do mesmo modo.

Basta para isso *multiplicar o numero dado pelo quadrado do denominador da unidade fraccionaria; extrahir a raiz quadrada do numero inteiro resultante, e dividil-a por aquelle denominador.*

Como ultimo exemplo, appliquemos esta regra á extracção da raiz quadrada, a menos de $\frac{1}{100}$, do numero fraccionario $\frac{22}{7}$, que foi adoptado pelos antigos geometras para exprimir a relação approximada entre o comprimento de

uma circumferencia qualquer e o do seu diametro. Multiplicando $\frac{22}{7}$ por 10000, quadrado de 100, e tomando os inteiros do numero fraccionario resultante, obtem-se 31428; extrahindo a raiz quadrada deste numero e dividindo-a por 100, chega-se a $\frac{177}{100}$ para a raiz procurada.

Foi a Geometria que inspirou o processo de que nos occupamos.

Com effeito, o numero cuja raiz se quer extrahir representa a área de um quadrado, e a raiz procurada um dos lados deste: Multiplicar, por ex., o numero dado por 10000, o que importa tornar a área 10000 vezes maior, equivale a tornar 100 vezes maior o valor de cada lado; de sorte que, obtido este, é preciso tornal-o 100 vezes menor para ter a raiz pedida.

A determinação approximada do lado de um quadrado cuja área é conhecida numericamente obrigou os geometras á extracção approximada das raizes quadradas, muito antes de se cogitar em Arithmetica do calculo approximado das fracções. Comprehende-se, porém, que similhante questão só podia ser systematicamente resolvida quando se soubesse converter uma fracção ordinaria em decimal, com uma approximação qualquer; e isso só teve logar no inicio da era moderna.

430.— NO CASO DAS FRACÇÕES BASICAS.— Si a fracção considerada tiver por denominador uma potencia qualquer da base numeral adoptada, a extracção de sua raiz approximada faz-se ainda de accôrdo com as regras precedentes, salvo as simplificações resultantes do modo especial de escrevel-a.

Para comprehendel-o, supponhamos a principio que não se fixa, de antemão, a approximação requerida. E' evidente que, em tal hypothese, apresentam-se os mesmos casos examinados quanto ás fracções ordinarias.

1.° *O denominador é quadrado,* isto é, o numero de algarismos decimaes á direita da virgula é par. Neste caso,

extrae-se a raiz do numero como se fosse inteiro e separa-se no resultado um numero de algarismos decimaes igual á metade dos que têm numero dado.

Com effeito, a raiz quadrada de 0,36 por exemplo, sendo igual á de $\frac{36}{100}$, já vimos que ella se obtem dividindo a raiz quadrada de 36 pela raiz quadrada de 100, o que dá $\frac{6}{10}$ ou 0,6.

Pela mesma razão, a raiz quadrada de 8,69 igual á raiz de $\frac{869}{100}$ é igual á raiz de 869 dividida pela raiz de 100. Ora, a raiz quadrada de 869 achando-se comprehendida entre 29 e 30, é evidente que a raiz procurada ficará entre $\frac{29}{10}$ e $\frac{30}{10}$. De modo que 2,9 é a raiz quadrada de 8,69, *por falta*, e 3 é a raiz do mesmo numero, porém, *por excesso*. Tomando qualquer dellas, vê-se, pois, que o erro commettido é menor do que $\frac{1}{10}$ (raiz quadrada do dominador da fracção proposta).

2.° *O denominador não é quadrado*, isto é, o numero dos algarismos decimaes é impar. Neste caso, para tornal-o quadrado, *dobra-se o numero dos algarismos decimaes, escrevendo para isso os zeros precisos á direita do numero dado; extrae-se a raiz do resultado como se fosse um numero inteiro, e separa-se na raiz achada um numero de algarismos igual á metade do que tinha a fracção considerada.*

Tomemos, por exemplo, a fracção 0,046 igual a $\frac{46}{1000}$. Ora, já vimos que a raiz quadrada de $\frac{46}{1000}$ é igual á raiz de $\frac{46000}{1000000}$; e como a raiz quadrada de 46000 acha-se comprehendida entre 214 e 215, e a raiz de 1000000 é 1000, segue-se que a raiz quadrada daquella fracção fica comprehendida entre $\frac{214}{1000}$ e $\frac{215}{1000}$, isto é, 0,214 e 0,215, numeros que differem entre si de 0,001 (ou da unidade dividida pela raiz quadrada do denominador, 1000000).

Desde que não se faça questão do gráo de approximação da raiz pedida, póde-se proceder de um outro modo: *ajunta-*

se um zero á direita do numero dado, e procede-se como precedentemente.

Com effeito, 0,046, sendo igual a $\frac{46}{1000}$ ou a $\frac{460}{10000}$, a raiz quadrada daquelle numero fraccionario será igual á raiz de 460 dividida pela raiz de 10000, que é 100.

Ora, a raiz de 460 achando-se comprehendida entre 21 e 22, é claro que a raiz procurada ficará entre $\frac{21}{100}$ e $\frac{22}{100}$, isto é, entre 0,21 e 0,22, que differem entre si de 0,01.

Vê-se que por este modo a approximação da raiz vae sómente até uma unidade da ordem dos centesimos; ao passo que, pelo modo precedente, ella attinge a dos millesimos.

Todavia, quando se trata de um numero fraccionario decimal que tem muitos algarismos, prefere-se seguir o ultimo modo.

Assim é que para obter a raiz quadrada de 3,14159 (numero adoptado pelos geometras modernos para exprimir a relação entre o comprimento de uma circumferencia qualquer e o do seu diametro), basta juxtapor um zero á sua direita, extrahir a raiz quadrada de 3141590, e tomar para ella metade daquelles algarismos decimaes, o que fornece 1,772.

Na pratica, quando se tem de extrahir a raiz quadrada de uma fracção ordinaria, cujo denominador não é quadrado perfeito, prefere-se ordinariamente convertel-a em decimal, para então extrahir a raiz quadrada com a approximação fixada. Nesta conversão deve-se levar o calculo até obter o dobro do numero de algarismos decimaes que se quer na raiz. Desde então, bastará tomar na raiz obtida metade daquelle numero de algarismos, depois da virgula.

431. — DA MESMA EXTRACÇÃO QUANDO É PREVIAMENTE FIXADA A APPROXIMAÇÃO DO NUMERO FRACCIONARIO DECIMAL, CUJA RAIZ SE PROCURA. — Ainda aqui tem inteira applicação a regra exposta, para o caso analogo das fracções ordina-

rias; salvo as simplificações resultantes da adopção das potencias da base para os denominadores.

Seja, por ex., proposto extrahir a raiz quadrada de 3,141, de modo que o erro commettido seja inferior a 0,001.

Notemos para isso que 3,141 é igual a $\frac{3141}{1000}$ ou a $\frac{3141000}{1000000}$.

Ora, a raiz quadrada do numerador desta fracção achando-se comprehendida entre 1881 e 1882, segue-se que $\frac{1881}{1000}$ ou 1,881 é a raiz quadrada do numero fraccionario proposto, com erro menor do que $\frac{1}{1000}$ ou 0,001.

Donde se deduz que, para extrahir a raiz quadrada de uma fracção decimal, que não é quadrado perfeito, com uma approximação dada, dá-se á fracção proposta duas vezes tantos algarismos decimaes quantos são aquelles até onde chega a approximação da raiz, escrevendo para isso á sua direita os zeros necessarios; abstrahe-se da virgula, extrahe-se a raiz quadrada do numero resultante, e separa-se nella, com a virgula, tantos algarismos decimaes para a direita, quantos são aquelles indicados pela approximação dada.

E' evidente que, sendo a fracção decimal um quadrado perfeito, o emprego da regra precedente conduzirá á raiz exacta.

Assim, por exemplo, a raiz de 6,6049, com approximação de 0,0001 é 2,57, sendo aquelle numero um quadrado perfeito.

432.— Extracção da raiz quadrada no caso em que o numerador da fracção que indica o erro é maior que a unidade. Conclusão.—A questão reduz-se immediatamente ao caso precedente; porque toda fracção cujo numerador é um numero inteiro differente da unidade, póde ser considerada como equivalente a uma outra, cujo numerador é a unidade e cujo denominador é aquella fracção invertida.

E' o que resulta evidentemente do que foi dito quando tratámos da divisão das fracções.

Assim, por ex., se fôr $\frac{3}{7}$ a fracção proposta, dividindo ambos os termos pelo proprio numerador, vê-se que ella se torna igual a 1 dividido por $\frac{7}{3}$. De sorte que se quizermos extrahir a raiz quadrada de uma fracção com um erro menor do que $\frac{3}{7}$, não teremos mais que pôr esta ultima fracção sob a fórma de um $\frac{1}{\frac{7}{3}}$, e applicar a regra acima.

Si tivermos, por ex., de extrahir a raiz de $\frac{17}{19}$, devemos multiplical-a por $\frac{49}{9}$ (que é o quadrado do denominador da fracção que indica a approximação), o que produzirá $\frac{833}{171}$.

Isso feito, extrahiremos os inteiros desta ultima fracção, o que dá 4; e como a raiz quadrada deste numero é 2, será $\frac{2}{\frac{7}{3}}$ ou $\frac{6}{7}$ a raiz buscada.

Ordinariamente, porém, a approximação é indicada por uma unidade fraccionaria decimal. Neste caso, em vez de escrever logo, á direita do numero dado, o dobro do numero de zeros indicados pela ordem decimal da approximação, costuma-se escrevel-os successivamente á direita dos restos, até obter na raiz o numero de algarismos decimaes, marcados pela mesma approximação.

E' o que se vê no exemplo seguinte, onde extrahimos a raiz quadrada de 3 com approximação de $\frac{1}{1000}$, obtendo-se $\frac{1732}{1000}$ ou 1,732.

3	1732			
1	2	27	343	3462
2 0.0		7	3	2
1 8 9		189	1029	6924
0 1 1 0.0				
1 0 2 9				
0 0 7 1 0.0				
6 9 2 4				
0 1 7 6				

Tendo obtido successivamente a raiz quadrada de um numero sem erro de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$...., é evidente

que poderemos prolongar indefinidamente a avaliação, sem que ella possa terminar.

Dá-se, portanto, aqui o mesmo que observamos na conversão das fracções ordinarias em dizimas. Mas, a serie obtida, cujo prolongamento indefinido deve representar a raiz, não poderá tornar-se periodica, pela circumstancia de não haver um divisor fixo nas divisões successivas.

Sabemos, com effeito, que o dobro do primeiro, dos dois primeiros, dos tres primeiros, etc., algarismos da raiz, apparece na avaliação como divisores differentes, impossibilitando assim a reproducção dos mesmos restos, dos mesmos dividendos parciaes, e por conseguinte dos mesmos algarismos da raiz. E' verdade que podemos calcular a serie numerica, que representa a raiz, até onde o exigirem as nossas necessidades; mas, em todos os casos, seremos obrigados a calculal-a termo por termo.

Na impossibilidade de obter rigorosamente a raiz quadrada de um numero não quadrado perfeito, temos de nos contentar com os seus valores approximados. Substituimos, portanto, os numeros *incommensuraveis* por numeros *commensuraveis*, mais ou menos approximados.

Para melhor comprehender o alcance logico de tal substituição, supponhamos que se procura o valor de $\sqrt{2}$.

Empregando o processo geral, achamos a principio que 1 é um valor approximado em menos de uma unidade por falta, e que, portanto, 2 é um valor approximado, em menos de uma unidade por excesso; de modo que a verdadeira raiz, ou o numero incommensuravel, se acha comprehendido entre 1 e 2.

Proseguindo o calculo, de accôrdo com o numero precedente, com o fim de obter o valor mais approximado, acharemos que 1,4 é a raiz approximada em menos de $\frac{1}{10}$ por falta; e que, portanto, 1,5 é um valor approximado em menos de $\frac{1}{10}$ por excesso: De modo que o numero in-

commensuravel em questão se acha comprehendido entre 1,4 e 1,5.

Continuando a operação, acharemos que 1,41 é um valor approximado, em menos de $\frac{1}{100}$ por falta; e que, portanto, 1,42 é um valor approximado em menos de $\frac{1}{100}$ por excesso; de sorte que o numero incommensuravel procurado fica comprehendido entre os numeros commensuraveis 1,41 e 1,42.

Continuando o calculo, acharemos que 1,414 e 1,415 são os valores approximados em menos de $\frac{1}{1000}$, respectivamente por falta e por excesso; de modo que o numero incommensuravel citado acha-se comprehendido entre estes dois ultimos numeros commensuraveis.

Obteremos em seguida 1,4142 e 1,4143 para valores approximados, em menos de $\frac{1}{10000}$, respectivamente por falta e por excesso; de maneira que o mesmo numero incommensuravel estará ainda comprehendido entre dois numeros commensuraveis.

Proseguindo no calculo, formaremos as series seguintes:

1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142.... ;
2 ; 1,5 ; 1,42 ; 1,415 ; 1,4143.....

Observando-as notamos: Que os termos da primeira serie vão augmentando e se approximam indefinidamente de $\sqrt{2}$; que os termos da segunda vão diminuindo e se approximam indefinidamente da mesma raiz; que a differença entre os termos correspondentes das duas series diminue indefinidamente, de maneira a se poder tornar menor do que qualquer grandeza dada.

Ora, como os numeros commensuraveis, que exprimem os quadrados dos termos consecutivos da primeira serie ou da segunda, têm para limite commum o numero 2, suas raizes, isto é, estes mesmos termos terão para limite $\sqrt{2}$.

Assim, pois, $\sqrt{2}$ é o limite dos numeros commensuraveis cujos quadrados têm para limite 2.

A consideração dos *limites*, que acaba de nos conduzir á definição do symbolo $\sqrt{2}$, permitte igualmente definir todos os outros numeros incommensuraveis.

Assim, por ex., $\sqrt[3]{5}$ é o limite dos numeros commensuraveis cujos cubos têm para limite 5: 1 é o menor destes numeros; $\sqrt[4]{17}$ é o limite dos numeros commensuraveis cujas quartas potencias têm por limite 17, sendo 2 o menor destes numeros, e assim por diante.

Veremos em Algebra como se póde obter qualquer destes numeros incommensuraveis com a approximação que se quizer, e teremos occasião de apreciar uma outra classe de numeros incommensuraveis.

Vê-se, pois, que a consideração dos limites nos autorisa tambem a substituir no calculo o valor de um numero incommensuravel por um valor approximado; e somos forçados a concluir que as regras estabelecidas para a avaliação dos numeros *commensuraveis* subsistem para os numeros *incommensuraveis*, *limites* dos primeiros.

O resultado de taes operações é evidentemente o numero commensuravel, representado com um erro apreciavel, podendo sempre ser este graduado á vontade. Desta arte póde-se sempre substituir nos calculos os numeros incommensuraveis por numeros commensuraveis, sufficientemente approximados, conforme as nossas necessidades.

A theoria da raiz quadrada generalisa assim as concepções numericas, tornando-as applicaveis ás grandezas continuas não susceptiveis de uma medida commum com a unidade respectiva.

CAPITULO XII

Generalização do espirito arithmetico mediante a simplificação das avaliações pelo aproveitamento das leis especiaes existentes entre os numeros combinados.—Theoria das progressões arithmeticas; surto decisivo desta theoria mediante o estudo dos numeros figurados.

§ λ δ' (34)

Papel desta theoria no estudo fundamental do calculo arithmetico

433.—Com o intuito de terminar o estudo do Calculo Arithmetico que deve preceder á apreciação da Algebra isolada, devemos esboçar as avaliações a que dá logar a consideração das series, examinando o seu caso mais simples, o das *progressões arithmeticas*.

Convém mesmo estender similhante exame aos numeros figurados, em virtude da estreita ligação que a sua avaliação tem, já com a das progressões arithmeticas, já com as que vimos resultar da *theoria numerica da ordem.* Reconheceremos, com effeito, que o prolongamento dos motivos que justificam a inclusão das progressões arithmeticas no estudo preliminar das avaliações, leva a não separar de taes series as que concernem aos *numeros figurados*.

434.—APRECIAÇÃO DA NOÇÃO DE SERIE OU PROGRESSÃO. —Para comprehender estes motivos, comecemos por sys-

---

(34) Numero *triákŏnta kai téssaros...* (trinta e quatro).

tematisar a noção de *serie* ou *progressão* e indicar o quadro geral das avaliações a que ellas conduzem.

A noção de *serie* ou *progressão* é a de successão, estendida a um numero indefinido de termos, de sorte que o seu germen se encontra na *theoria subjectiva dos numeros*, onde vimos que a noção de successão surge com o numero 3. A instituição da escala numerica acarretou similhante extensão, a principio restricta, mas depois indeterminada, quando essa escala teve de fornecer base para as avaliações quaesquer.

Desde então, a constituição de tal escala e as distincções surgidas entre os numeros, em consequencia de sua apreciação subjectiva, tenderam a dar á noção de serie a sua inteira generalidade. Pois que desse conjuncto de antecedentes resultava logo a consideração de varias series, a saber :

1ª, a serie natural dos numeros ;
2ª, a serie dos numeros impares ;
3ª, a serie dos numeros pares ;
4ª, a serie dos numeros primos ;
5ª, a serie de unidades de diversas ordens.

O ponto de vista relativo basta para estender indefinidamente este quadro mediante a consideração : 1°, das series de diversas ordens dos numeros impares ; 2°, das series de diversas ordens dos numeros pares ; 3°, das series de diversas ordens dos numeros primos ; 4°, das series das unidades compostas nos diversos systemas de numeração.

Entre essas series vê-se logo surgir uma distincção. Umas são de tal natureza que um termo qualquer se fórma do anterior como este se formou com o precedente, de sorte que tres termos bastam para definir a progressão. Estão neste caso : 1°, serie natural ; 2°, serie dos numeros impares; 3°, serie dos numeros pares; e 4°, serie das unidades de diversas ordens.

Mas a serie dos numeros primos não permitte apanhar entre os seus termos nenhuma lei de filiação. Quanto ás primeiras, é facil de distinguir uma separação cuja profundidade havemos de reconhecer mais tarde.

Com effeito, nas tres primeiras series, isto é, serie natural dos numeros, serie dos numeros impares e serie dos numeros pares, encontra-se, como caracter commum, que a differença entre dois termos consecutivos é constante, de sorte que um termo qualquer forma-se do anterior juntando-lhe a differença entre os dois primeiros termos, ou do seguinte, tirando-lhe essa differença.

Essa differença é o que se chama *razão* da progressão.

Na serie das unidades de diversas ordens o quociente entre dois termos consecutivos é que fica constante, de sorte que cada termo se forma do precedente multiplicando-o pela relação entre o segundo e o primeiro termo da serie; ou do seguinte dividindo-o por essa relação.

Esse quociente é o que se denomina *razão* da progressão.

A theoria subjectiva dos numeros basta para conduzir a varias series do primeiro genero.

Mas directamente só a numeração conduz a uma progressão de segundo typo. Apanhada, porém, essa lei de filiação, vê-se que o conjuncto das unidades de diversas ordens dos varios systemas de numeração fornecem progressões do mesmo genero. Assim, as series de uma ou outra categoria são realmente em numero infinito.

As da primeira são as mais simples, que possamos imaginar, e têm o nome de *progressões arithmeticas*; as da segunda já pertencem a uma categoria muito complicada como o reconheceremos no estudo do Calculo Algebrico, e denominam-se *progressões geometricas*.

Além dessas progressões, o problema das combinações e, portanto, o das repartições, faz-nos considerar as series dos numeros figurados.

Esses antecedentes são assás multiplicados para nos permittirem conceber que os typos das series são realmente em numero indefinido, de sorte que, por mais limitadas que fossem as especulações a que cada typo désse logar, o conjuncto dessas especulações formaria um campo inexgotavel.

Si, portanto, a sabedoria espontanea da Humanidade não levasse a restringir a exploração de cada sciencia ao que é indispensavel para abordar a seguinte, de modo a chegar quanto antes á Moral Pratica, póde-se dizer que ainda hoje estaria ella resolvendo o seu dominio inicial.

Mas por ahi vê-se, ao mesmo tempo, quanto é facil entregar-se a investigações que, comquanto reaes, são completamente ociosas, e, portanto, inuteis e mesmo mais prejudiciaes do que são as divagações metaphysicas.

Quanto ás concepções theologicas, basta reconhecer a efficacia moral que ellas tiveram e ainda hoje possuem, para evidenciar a sua superioridade, mesmo mental, sobre as divagações scientificas.

Restringindo-nos agora ás considerações precedentes, cumpre finalmente assignalar que ellas nos mostram que toda a progressão reduz-se normalmente a tres termos; pois que tantos bastam para caracterisar a lei de filiação.

Póde-se formar artificialmente progressões mais complicadas, mas a sua concepção é forçosamente confusa.

435. — REFLEXÕES SOBRE O ADVENTO DE TAL NOÇÃO. — Vejamos agora quaes foram as condições historicas do advento da apreciação das *series*. Comquanto implicitamente contidas no primitivo surto do genio theorico, as series só foram consideradas directamente quando as necessidades praticas para ahi chamaram a attenção da Humanidade.

Essas necessidades fizeram-se sentir atravez do estudo da ordem geral. De sorte que, aqui, como sempre, foi o ponto de vista concreto que serviu de estimulo e de guia á razão abstracta.

Para apanhar essa connexão basta reflectir que a mais simples de qualquer lei natural nos conduz logo a um problema de series, quando os phenomenos são susceptiveis de avaliação.

Tivemos um exemplo disso na theoria das combinações, onde a marcha espontanea para resolver o problema conduziu-nos a achar a somma dos termos da escala numerica, e a somma dos termos das series figuradas que resultam de tal escala.

No estudo da Geometria veremos confirmar-se a mesma observação.

Mas, para tomar um exemplo mais frisante, porque versa sobre um phenomeno dos mais vulgares, escolheremos a lei da qual resultou a instituição da Physica por Galilêo.

Referimo-nos á quéda dos corpos. E' sabido que o tempo que um corpo leva para cahir de uma certa altura é tanto maior quanto maior é essa altura. Até esse dado a razão commum chega, mas esse apanhado é insufficiente para dirigir a nossa intervenção: a systematisação desta exige que se saiba qual a relação precisa que existe entre a altura da quéda e o tempo nella gasto.

Trata-se de dois phenomenos susceptiveis de medição exacta, a saber: o tempo e a distancia em que o corpo se acha do sólo. Isto posto, o expediente que se offereceu a Galilêo consistiu em fazer um corpo cahir de diversas alturas e tomar nota do espaço que elle percorria durante cada segundo de quéda, na esperança de que esses numeros tivessem entre si uma certa filiação, facil de apanhar.

Desde então, o espaço total, percorrido durante um certo numero de segundos, seria dado pela somma dos numeros que lhe correspondessem. Instituindo as experiencias convenientes, Galilêo verificou que os espaços percorridos nos segundos successivos eram representados pela serie de numeros impares.

Feita esta descoberta, comprehende-se que para calcular a altura de onde um corpo cahiu, quando se sabe o numero de segundos que durou a quéda, basta achar a somma de uma parte qualquer da serie dos numeros impares. O problema da quéda dos corpos fica, pois, reduzido ao problema abstracto da somma dos termos de uma serie.

Mas é facil de vêr que os outros problemas, a que póde dar lugar a consideração do mesmo phenomeno, recahem em questões sobre esta mesma serie.

Assim, por exemplo, si fôr conhecida a altura de onde um corpo cahiu, e si se quizer saber o tempo que durou a quéda, o problema reduz-se a saber quantos termos da serie dos numeros impares dão uma somma igual ao numero proposto.

Mas, aqui surge um problema novo, porque a determinação da altura póde ser representada por um numero qualquer, e este numero póde não corresponder a uma somma de termos da serie de que se trata.

A questão não comporta então solução exacta; isto é, nós não podemos conhecer o tempo senão approximadamente. E para que esta approximação seja levada tão longe quanto fôr conveniente, é necessario que resolvamos a seguinte questão: *Dada a serie dos numeros impares, consideral-os como fazendo parte de uma nova serie de numeros fraccionarios, tão approximadamente quanto quizermos.*

Cada termo desta nova serie corresponderá a uma certa fracção de segundos. E a somma de um certo numero de seus termos correspondendo a uma certa altura, corresponderá a um certo tempo, avaliado em fracções de segundo.

Ora, a solução deste problema depende de *inserir um certo numero de termos entre os de uma progressão dada.*

436. — APRECIAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS QUE SE PODEM PROPOR SOBRE AS SERIES, NO PONTO DE VISTA ARITHMETICO. — Estas considerações nos levam a examinar

quaes os problemas que se podem propôr sobre as series no ponte de vista arithmetico.

Encarados de um modo geral, esses problemas são todos os que se podem propôr sobre numeros quaesquer. A consideração das series apenas os modifica, fazendo surgir a esperança de simplificar as avaliações, mediante o aproveitamento da lei de filiação entre os termos combinados.

Mas, o predominio do ponto de vista concreto, que levou a destacar a apreciação das series, tambem fez sobresahir as questões que sobre ellas nos podiam interessar. Foi assim que o conjuncto da Philosophia Segunda, no que ella tem de susceptivel de intervenção do Calculo, patenteou que a respeito de cada serie só havia duas questões fundamentaes no ponto de vista arithmetico: uma preliminar, que consistia em apanhar a filiação geral de um termo qualquer quanto ao inicial e o seu numero de ordem; outra, final, consistindo em achar a somma de uma parte qualquer da serie.

Esta segunda questão dá logar a uma distincção importante, quando se está no ponto de vista das avaliações.

Com effeito, ha series, como as progressões arithmeticas, em que a somma dos termos cresce além de todo o limite, á medida que se incluem novos termos na somma. Mas ha casos em que a somma dos termos vai tendendo para um limite fixo. Nós temos um exemplo deste caso considerando as fracções decimaes periodicas. Ellas constituem a somma de uma progressão geometrica, em que o primeiro termo é uma fracção tendo para numerador o periodo e para denominador a potencia de 10 indicada pelo numero de algarismos do periodo. A razão é ahi a reciproca dessa potencia.

Ora, vimos que a somma de tal progressão tende para um limite facilmente assignalavel. Estas series chamam-se *convergentes*, ao contrario das outras que se denominam *divergentes*.

Além destas duas questões, as series offerecem, sob o ponto de vista da avaliação, o problema da *inserção de termos* entre os que se acham formados, sem alterar a lei de filiação. Mas essa questão não é, como veremos, sinão uma das inversões que os dois outros problemas podem apresentar.

Tendo assim indicado o dominio geral das series no ponto de vista arithmetico, podemos apresentar os motivos que levaram A. Comte a esboçar o seu estudo como o remate da apreciação fundamental do Calculo Arithmetico.

440. — MOTIVOS SCIENTIFICOS QUE LEVARAM A INCLUIR ESSE ASSUMPTO NO ESTUDO FUNDAMENTAL DO CALCULO ARITHMETICO. — Estes motivos são os seguintes:

1°. Necessidade de esboçar desde o inicio da Logica o quadro geral das *avaliações* para bem caracterisar não só o Calculo Arithmetico, mas mesmo por exclusão o Calculo Algebrico.

2°. Necessidade de fornecer os typos geraes das avaliações a que as considerações concretas podem dar lugar. No ensino ordinario parece que estes typos se reduzem ás operações fundamentaes.

3°. Necessidade de patentear o espirito geral do Calculo Arithmetico como consistindo em simplificar as avaliações, pelo aproveitamento das leis entre os numeros combinados. Isto não é possivel sem ter apreciado o conjuncto das manifestações a tal respeito.

As operações fundamentaes nos fornecem um exemplo caracteristico sob esse aspecto, não só quanto á numeração, mas ainda relativamente aos casos mais simples em que se fazem recahir os casos mais complicados.

4°. Necessidade de conceber sempre a indole geral dessas simplificações como fazendo recahir todos os casos nas combinações elementares.

441. — APRECIAÇÃO GERAL DOS MOTIVOS LOGICOS QUE LEVAM A INCLUIR O ESTUDO ELEMENTAR DAS SERIES NO DO-

MINIO FUNDAMENTAL DO CALCULO ARITHMETICO. — Resultam elles da necessidade de patentear os limites reaes de nossa capacidade inductiva, manifestando aliás os auxilios que essa capacidade recebe da abstracção systematica.

Similhante estudo deve, pois, ser instituido de modo a patentear a restricção dos casos em que os problemas theoricos são accessiveis á nossa investigação.

Mas, ao mesmo tempo, é indispensavel mostrar como a sabedoria da humanidade consegue multiplicar a efficacia theorica e pratica desse pequeno numero de casos soluveis. Assim se reconhece simultaneamente: *a)* que é necessario não abordar senão as questões theoricas que forem exigidas pelo conjuncto das necessidades humanas; *b)* que é necessario procurar esclarecer os casos concretos com o auxilio das questões abstractas que nos forem accessiveis.

442. — Emfim, do que precede resulta a necessidade de dividir este assumpto em duas partes destinadas a caracterisar especialmente a restricção e a extensão possivel do Calculo Arithmetico no que concerne ás series.

E' o que faremos em seguida. (34a).

§ λ ε' (35)

Theoria das progressões arithmeticas

443. — DUPLO ASPECTO EM QUE AS PROGRESSÕES ARITHMETICAS PODEM SER CONSIDERADAS. — Tendo no paragrapho precedente definido as progressões arithmeticas, devemos agora resolver as duas questões essenciaes a que ellas dão lugar.

(34a) Notas do Curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.

(35) Numero *triákõnta kaí pente*... (trinta e cinco).

DE LEMOS

Antes, porém, precisamos apreciar o duplo aspecto em que podem ser consideradas as mesmas progressões. Ellas distinguem-se em *crescentes* e *decrescentes*, conforme cada termo excede o anterior ou é por elle excedido da differença constante que, conforme dissemos, se denomina *razão por differença* ou simplesmente *razão*, e que tambem é chamada *base* da progressão.

Assim, as progressões seguintes são, a primeira crescente e a segunda decrescente, sendo em ambas a *razão* igual a 5:

1 6 11 16 21 26.... ; 45 40 35 30 25 20....

444. — EXAME DA QUESTÃO PRELIMINAR : DETERMINAÇÃO DE UM TERMO QUALQUER, CONHECIDO O SEU LUGAR NA SERIE E OS DOIS PRIMEIROS TERMOS DA MESMA SERIE. — Toda progressão arithmetica ou por differença fica caracterisada quando se conhece os dois primeiros termos. Com effeito, a differença desses termos indica logo a *razão* e elles mostram si a progressão é *crescente* ou *decrescente*.

Assim, por exemplo, as progressões cujos primeiros termos são 1 e 2, 1 e 3 e 2 e 4, são evidentemente crescentes. A primeira é a serie natural dos numeros, cuja razão é 1; a segunda a serie dos numeros impares, cuja razão é 2; e a terceira a serie dos numeros pares, cuja razão é tambem 2 e que se transformaria na primeira si dividissemos cada um dos seus termos por 2.

Mas, cumpre observar que a consideração de dois numeros é insufficiente para reconhecer si um phenomeno concreto é caracterisado por uma progressão arithmetica. Para isto são necessarios pelo menos tres termos. Em rigor elles bastam para uma primeira inducção, em vista da lei mãe da Philosophia Primeira (1ª lei).

As observações posteriores são destinadas a confirmar essa hypothese inicial. Portanto, philosophicamente, toda a

progressão arithmetica é caracterisada por tres termos. Attendendo a este destino concreto é que se percebe bem como toda a progressão consta necessariamente de tres termos. Nós não podemos comparar directamente cada novo caso senão com o antecedente e com o seguinte. (35a).

Feitas estas considerações, torna-se facil apanhar em uma progressão arithmetica a lei que liga um termo qualquer ao inicial e ao seu numero de ordem. Para isso basta referir successivamente o termo considerado aos que o precedem.

Supponhamos a principio que a progressão é crescente: Um termo qualquer é igual ao precedente mais a razão; este, por sua vez, sendo igual ao anterior mais a razão, o primeiro será igual á somma do que o precede de dois lugares com 2 vezes a razão. Este ultimo sendo, por seu turno, igual ao que o precede mais a razão, aquelle será igual á somma do que o precede de tres lugares com 3 vezes a razão.

E assim, de proximo em proximo, chega-se á conclusão de que *um termo qualquer é igual á somma do primeiro com tantas vezes a razão quantos forem os termos precedentes*.

Assim, por exemplo, o 42° termo da serie dos numeros naturaes é igual a 1 mais 41, isto é, 42; o termo de igual ordem da serie dos numeros pares é igual a 2 mais 41 vezes 2, isto é, 84, que é o dobro do termo correspondente da serie natural; emfim, o termo da mesma ordem da serie dos impares será igual a 1 mais 41 vezes 2, isto é, a 83, que equivale ao termo correspondente da serie dos numeros pares augmentado de uma unidade

Supponhamos agora que a progressão é descrescente. Neste caso um termo qualquer é igual ao precedente menos

(35a) Notas do Curso do Cidadão R. Teixeira Mendes.

a razão ; este, por sua vez, sendo igual ao anterior menos a razão, o primeiro será igual ao que o precede de dois lugares menos 2 vezes a razão. Este ultimo sendo tambem igual ao que o precede menos a razão, aquelle será igual ao que o precede de tres logares, menos 3 vezes a razão.

E assim, de proximo em proximo, chega-se á conclusão de que *um termo qualquer é igual á differença entre o primeiro e tantas vezes a razão quantos são os termos precedentes*

Assim, por exemplo, o 11° termo da progressão 0,100 0,999. 0,998.... (cuja razão é igual a 0,100 menos 0,999, ou a 0,001), será 0,100 menos 10 vezes 0,001, isto é, 0,100 menos 0,01 ou 0,090.

445. — LEI DE SOMMAÇÃO : QUESTÃO PRINCIPAL, QUE CONSISTE EM DETERMINAR A SOMMA DE UMA PARTE QUALQUER DE UMA PROGRESSÃO ARITHMETICA. — Si bem que uma progressão arithmetica deva de ordinario ser olhada como illimitada, basta geralmente considerar um numero limitado de seus termos, o qual poderá ser maior ou menor, conforme o grão de approximação com que se quer obter a sommação da serie.

Vejamos, pois, como obter a somma de um certo numero de termos de uma progressão arithmetica.

A solução desta questão é conseguida fazendo recahir a somma dessas parcellas desiguaes no caso de uma somma de parcellas iguaes, tal como nos offerece a multiplicação. Essa reducção baseia-se em uma inducção preliminar, pela qual se reconhece que *em toda a progressão arithmetica a somma de dois termos quaesquer equidistantes dos extremos é constante e igual á somma dos mesmos extremos.*

E' o que se póde reconhecer considerando, por exemplo, a serie dos numeros impares 1 3 5 7 9 11 13 15...., onde, tomando os oito primeiros termos, verifica-se que a somma do segundo com o setimo, do terceiro com o sexto e do quarto com o quinto, é constantemente igual a 16, que é

a somma dos termos extremos dentre os que consideramos. E como o mesmo se constata em qualquer outra progressão arithemetica, póde-se induzir a observação acima.

A expressão do termo geral permitte tambem reconhecel-a em todos os casos. E' o que se póde vêr na progressão acima comparando as expressões do 2° e 7° termos com as do 3° e 6°, e etc., cujos resultados são constantemente os mesmos e equivalem á somma dos extremos. Todavia, essa comparação não é mais legitima nem mais natural de que a inducção immediata que resulta da contemplação da serie.

Isto posto, si o numero de termos a sommar fôr par, é evidente que emparelhando os equidistantes dos extremos, podemos substituir a somma dos termos da serie por uma outra em que as parcellas são iguaes entre si, mas em numero de metade do de termos considerados.

Nessa hypothese a sommação reduz-se, pois, a uma addição de parcellas iguaes, isto é, a uma multiplicação em que se póde tomar para multiplicando a somma dos extremos e para multiplicador a metade do numero de termos.

Por exemplo, tratando-se de obter a somma dos 8 primeiros termos da progressão acima, podemos substituil-a pela seguinte :

1 mais 15   3 mais 13   5 mais 11   7 mais 9

onde as parcellas sendo iguaes, a sua somma é dada por uma dellas (1 mais 15) multiplicada pelo seu numero, que é a metade, $\frac{8}{2}$, do de termos considerados a principio. A somma procurada é, pois, igual ao producto de 1 mais 15 por $\frac{8}{2}$, ou 64.

Resta vêr si é possivel a mesma transformação quando se considera um numero *impar* de termos. Ora, o resultado precedente suggere logo o artificio indispensavel a tal fim. Porque elle nos mostra que o *dôbro da somma dos termos propostos é então igual a um producto, em que o multi-*

plicando é a somma dos extremos e o multiplicador é o numero de termos. E é facil de vêr que esta lei se estende ao caso do numero impar de termos.

Com effeito, é evidente que para ter o dôbro da somma dos termos de uma progressão basta fazer a somma dos termos, tomando cada um delles duas vezes. Mas, desde então, podemos emparelhar esse conjuncto de termos combinando os equidistantes dos extremos. Isto nos dará uma somma de parcellas iguaes; de sorte que em todos os casos, *o dôbro da somma de um numero qualquer de termos de uma progressão arithmetica equivale ao producto da somma dos extremos pelo numero de termos.* E, portanto, a somma será a metade desse producto.

Para esclarecer as idéas, supponhamos que se trata de effectuar a sommação dos sete primeiros termos da progressão acima.

Invertendo a sua ordem e collocando-os assim por baixo daquelles, de modo que se correspondam, temos :

1	3	5	7	9	11	13
13	11	9	7	5	3	1

Sommando termo a termo, virá :

1 mais 13 3 mais 11 5 mais 9 7 mais 7 9 mais 5 11 mais 3 e 13 mais 1

que é uma serie de parcellas iguaes, cuja somma é, por conseguinte, igual ao producto de 1 mais 13 por 7.

Como, porém, similhante somma é o dôbro da procurada, esta será igual á sua metade, isto é, ao producto de $\frac{1 \text{ mais } 13}{2}$ por 7 ou 49.

Podemos, pois, construir a seguinte formula : *a somma dos termos de uma progressão arithmetica é igual á metade do producto da somma dos extremos pelo numero de termos considerados.*

446.—EXAME DA FORMULA PRECEDENTE.—Esse enunciado combina, pois, quatro numeros, a saber: *a somma dos termos, o numero dos termos, o primeiro termo e o ultimo termo.*

A formula correspondente deve, pois, permittir a determinação de qualquer desses numeros, quando os outros tres forem dados. Vê-se, assim, surgirem quatro problemas differentes, conforme se considera qualquer daquellas quatro quantidades como incognita.

Para a solução completa das questões que conduzem á determinação de quaesquer desses numeros, será necessario muitas vezes considerar conjunctamente com a formula precedente a que exprime um termo qualquer pelos dois primeiros, e o lugar que elle occupa na serie.

Com effeito, si se trata, por exemplo, de determinar o *numero* de termos e construir a serie, suppondo conhecida a *somma* dos termos, o *primeiro* e o *ultimo*, a formula da somma nos mostra que é preciso dividir o dôbro desta pela somma dos extremos para ter o numero de termos.

Mas, não será possivel escrever a serie sem conhecer o segundo termo ou a *razão*, o que vem a dar no mesmo.

Ora, para exprimir a *razão* será necessario recorrer á formula que dá o ultimo termo em relação com o primeiro que se suppõe conhecido, e do numero de termos, que acaba de ser determinado. Para obtel-a, basta notar que, sendo o ultimo termo igual ao primeiro *mais* ou *menos* tantas vezes a *razão* quanto os termos precedentes, conclue-se dahi que a differença entre o ultimo termo e o primeiro será igual ao producto da *razão* pelo numero de termos precedentes, si a progressão fôr crescente; ou que a differença entre o primeiro e o ultimo será igual áquelle producto, si a progressão fôr decrescente.

Por conseguinte, *a razão é sempre igual á differença entre os termos extremos, dividida pelo numero de termos, menos um.*

Assim, por exemplo, se achará que a *razão* da progressão cujo primeiro termo é 0 e cujo setimo termo é 36, é expressa por $\frac{36}{6}$ ou 6.

Do mesmo modo se verá que a razão da progressão cujo primeiro termo é $\frac{1}{10}$ e cujo undecimo termo é $\frac{9}{100}$, será expressa por $\frac{0{,}10 \text{ menos } 0{,}09}{10}$, isto é, por $\frac{0{,}01}{10}$ ou 0,001.

E' a formula da *razão* que permitte *inserir em qualquer progressão arithmetica um certo numero de termos* entre os que já se acham formados, sem alterar a sua lei de filiação.

Assim, por exemplo, para inserir 99 termos entre 1 e 21, primeiro e undecimo termos de uma certa serie, bastará determinar a razão, que será expressa por $\frac{21 \text{ menos } 1}{100}$ ou 0,2. Desde então, addicionando continuamente este numero ao primeiro termo, teremos os outros 101 termos da progressão resultante, a saber: 1 1,2 1,4 1,6 e etc.

Querendo ainda inserir 9 termos, por exemplo, entre o primeiro e o undecimo da progressão decrescente acima citada, bastará determinar a razão, que vimos ser 0,001, e subtrahir successivamente este numero do primeiro termo 0,1 até attingir o ultimo 0,09.

Podemos, pois, concluir que *para inserir um numero qualquer de meios differenciaes entre dois termos quaesquer de uma progressão, divide-se a differença entre estes dois termos pelo numero de meios mais um. Assim se acha a razão, a qual, sendo ajuntada successivamente ao menor termo, ou tirada continuamente do maior, dará os meios procurados.*

Applicando esta regra á inserção de 9999 meios entre os dois primeiros termos da progressão 0 1 2...., (35b) acharemos 0,0001 para valor da razão e virá: 0 0,0001 0,0002....

(35b) Note-se que em todas as progressões que têm, como esta, zero para 1º termo, o 2º é igual á razão; o 3º a 2 vezes á razão; o 4º a 3 vezes a razão, e assim por diante. Portanto, em vista da expressão de um termo qualquer, póde-se concluir que em similhantes progressões: *a)* a somma de

450.—MEIO DE INTRODUZIR A RAZÃO NA FORMULA DA SOMMA.—Voltando a tratar da formula da somma e comparando-a com a de um termo qualquer, vê-se logo que ella póde ser transformada de modo a só conter o *primeiro termo*, a *razão* e o *numero de termos*.

Mas, desde então, o seu enunciado torna-se mais complicado por causa da substituição do ultimo termo, que ahi se acha pela formula correspondente.

Assim procedendo, chega-se á seguinte formula para determinar a *somma* dos termos por meio do seu *numero*, do *primeiro* e da *razão*: Multiplica-se o numero de termos menos um pela razão, e procura-se a somma, ou differença, deste producto e de duas vezes o primeiro termo, conforme seja a serie crescente ou decrescente. Divide-se finalmente este resultado por 2 e multiplica-se o quociente pelo numero de termos.

Applicando esta regra para determinar a somma de um numero qualquer de termos da escala numerica, verifica-se que o resultado é sempre igual á metade do producto deste numero pelo que se segue na mesma escala. Empregando-a depois para achar a somma de igual numero de termos das series dos *pares* e dos *impares*, vê-se que o resultado para a primeira é o dôbro do precedente, e para a segunda é igual ao seu quadrado.

Como esta formula é complicada e difficil de reter, é preferivel determinar a principio o ultimo termo da progressão e obter em seguida a somma por meio da outra formula, o que afinal equivale a empregar esta.

---

dois quaesquer de seus termos é um termo da mesma progressão ; *b)* dados dois termos, si subtrahirmos o menor do maior, o resto obtido faz parte da progressão ; *c)* multiplicando um termo qualquer por um numero inteiro qualquer, o producto resultante encontrar-se-ha entre os termos da progressão.

Estas propriedades applicam-se tambem á progressão arithmetica crescente, cujo 1º termo é um multiplo da razão.

Seja, por exemplo, proposto determinar a somma de 18 termos da progressão arithmetica cujo primeiro termo é 2, sendo a razão 3. E' evidente que si conhecermos o ultimo termo, poderemos determinar a somma pela primeira regra. Ora, o ultimo termo é igual a somma de 2 com o producto de 18 menos 1 por 3, isto é, a 2 mais 51 ou 53.

Portanto, para ter a somma procurada, bastará addicionar o primeiro termo, 2, a este resultado, multiplicar esta somma, 53, pelo numero de termos, 18, e dividir o producto, 990, por 2, o que dá 495.

Seja ainda proposto conhecer a somma dos 27 primeiros termos da serie dos numeros pares. Sendo cada um dos termos desta serie igual ao dobro daquelle da mesma ordem na escala numerica, é a principio evidente que o seu vigesimo setimo termo é igual a 2 vezes 27 ou 54.

Portanto a somma procurada será igual a metade do producto de 54 mais 2 pelo numero de termos, ou a $\frac{54 \text{ mais } 2}{2}$ multiplicado por 27, isto é, a $\frac{56}{2}$ por 27 ou $\frac{1512}{2}$, igual a 756.

Si tomassemos metade deste numero, teriamos evidentemente a somma dos 27 primeiros termos da escala numerica, porquanto cada um destes é metade do que lhe corresponde na serie dos pares.

451.—Os problemas a que as formulas precedentes dão lugar.—Comparando a lei dos termos numa progressão arithmetica com a das sommas na mesma progressão, reconhece-se immediatamente que ha cinco quantidades a considerar em taes series, a saber: o *primeiro termo*, a *razão*, o *ultimo termo*, o *numero de termos* e a *sua somma*.

Como tres quaesquer dessas quantidades bastam para permittir a determinação de qualquer das duas restantes, é evidente que se podem propor 10 questões distinctas (numero de combinações das 5 quantidades 3 a 3), podendo cada uma

dar lugar a dois problemas, conforme se pede uma ou outra das restantes. São, portanto, ao todo 20 problemas, aos quaes se reduzem todas as combinações a effectuar sobre as progressões arithmeticas.

Por exemplo, a formula transformada precedentemente encerra, como vimos, quatro numeros: a *somma*, o *primeiro termo*, a *razão* e o *numero de termos*.

Esta formula poderá, pois, servir para determinar qualquer destas quantidades quando as tres outras forem conhecidas. Mas, a sua utilisação póde não ser tão simples como a da formula de onde proveio, sobretudo em certos casos. E' assim que a determinação do *número de termos* por meio della tornar-se-hia impossivel para quem só possuisse os conhecimentos até aqui adquiridos.

Entretanto, a questão seria simples si conhecessemos o ultimo termo; porque então poderiamos achar o *numero de termos* com o auxilio da formula que dá a differença entre os extremos. Vê-se immediatamente que esta differença dividida pela razão é igual ao numero de termos menos um; e que, portanto, esse quociente mais um é igual ao numero de termos.

Poderiamos chegar ao mesmo resultado seguindo outra marcha. Com effeito, tendo visto que o dobro da somma dos termos é igual ao producto da somma dos extremos pelo numero de termos, conclue-se immediatamente que o numero de termos é igual ao quociente do dobro da somma dos termos pela somma dos extremos.

Todavia, cumpre não esquecer que, neste modo como no precedente, suppomos conhecido o ultimo termo. Mas, a determinação deste com os dados acima, exige tambem conhecimentos que ainda não temos até aqui.

Em resumo, todos os problemas deste genero que não podem ser resolvidos com as tres formulas fundamentaes, isoladamente consideradas, e que exigem, portanto, a combinação

de duas dentre ellas, só podem ser resolvidos de um modo geral por meio da Algebra.

Estão neste caso os problemas em que figuram o *primeiro termo*, *o ultimo*, *a razão* e *a somma*, como o que acima nos referimos, e bem assim aquelles em que a primeira destas quantidades é substituida pelo *numero de termos*.

Por isso que nessa e naquella hypothese póde-se propôr a determinação de qualquer uma das quatro quantidades por meio das tres restantes, é obvio que teremos ao todo oito questões que não podem ser resolvidas com os recursos que até aqui possuimos e que exigem, por conseguinte, a generalização de espirito arithmetico.

Podemos, pois, conceber oito problemas distinctos cuja solução não póde ser dada pelas tres formulas isoladamente consideradas, pois que exigem a sua combinação. (35c).

(35c) Nas 4 primeiras questões seguintes, apresentamos 8 problemas deste genero que embora resolvidos arithmeticamente, fazem sentir assás a necessidade de generalisar o espirito arithmetico. Mostramos tambem como se póde, por excepção, resolver em arithmetica os outros 12 problemas sobre progressões, a que dão lugar as 6 questões restantes :

I.—Um particular que deve a um outro se compromette a pagar-lhe em differentes prestações, sendo cada uma maior que a precedente de 4 libras ; admittindo que a primeira fosse de 3 libras e a ultima de 91 libras, pergunta-se: 1º qual o numero de prestações ; 2º qual a somma total a pagar.

Pelo enunciado desta questão percebe-se que é conhecido o *primeiro termo*, o *ultimo* e a *differença* ou *base da progressão*, e que se trata de achar: o numero dos termos, e a sua somma. Sabendo que *o ultimo é igual ao primeiro mais a differença multiplicada pelo numero dos termos diminuido da unidade*, si de 91, que é o ultimo termo, subtrahirmos o primeiro, 3, restará 88 para valor da differença multiplicada pelo numero de termos diminuido da unidade. Sendo 4 a differença, é claro que, dividindo 88 por 4, teremos o numero de termos diminuido de uma unidade, isto é, 22, e o numero de termos é 23. Multiplicando finalmente 23 por 47, *semi-somma dos extremos*, teremos o numero 1081 para a somma das prestações.

II. — Pagou-se uma certa somma em 23 prestações que excediam umas das outras de uma mesma quantidade, a primeira de 3 libras e a ultima de 91 ; pergunta-se: 1º qual era a differença, 2º qual a somma paga.

Vê-se que neste caso são conhecidos o primeiro, o ultimo e o numero de termos de uma progressão, tratando-se de determinar a *differença* e a *somma*. Por isso que o 23º termo é igual ao primeiro mais 22 vezes a differença, si do ultimo 91 se subtrahe o primeiro, 3, restará 88, que dividido por 22, dá 4 para a differença do pagamento. A somma se achará immediatamente multiplicando 47, semi-somma dos extremos, por 23, o que dá 1081.

III.—Pagou-se uma somma de 1081 libras em muitas prestações que se excediam todas igualmente, a primeira tendo sido de 3 libras e a ultima de 91; pergunta-se: 1º qual era a differença, 2º qual o numero de pagamentos.

452.—Só nos resta, emfim, observar que essa circumstancia nos fornece um exemplo da complicação abstracta de questões, que são, entretanto, simples quando directamente examinadas. Cumpre, com effeito, notar que apesar da simplicidade desta questão, ella é todavia susceptivel de fornecer problemas de difficil solução.

Poderiamos ainda aqui apresentar outras questões igualmente simples e que são tambem insoluveis, como, por exemplo, o da sommação de uma serie em que um termo qualquer é igual a somma dos dois precedentes. Porém não precisamos insistir mais sobre a insolubilidade geral dos problemas a que as series dão lugar ; porquanto, ao tratarmos da multiplicação, já fizemos vêr que em geral a questão só é soluvel quando é possivel estabelecer uma

---

Vê-se ainda pelo enunciado da questão que se conhece aqui a somma de todos os termos de uma progressão arithmetica, e se procura determinar a differença e o numero delles. Dividindo a somma 1081 por 47, semi-somma dos extremos, teremos o quociente 23 para o numero dos termos. Para ter a differença, subtrahiremos o primeiro termo, 3, do ultimo 91; e dividindo o resto por 22, numero de termos precedentes, virá 4 para essa mesma differença.

IV.—Um particular pagou a um outro uma somma desconhecida em 23 prestações, sendo a primeira de 3 libras e cada uma das outras excedendo a precedente de 4 libras; pergunta-se : 1º qual foi a ultima das prestações, 2º qual a somma destas.

Segundo os dados do problema, vê-se que são conhecidos o primeiro termo, a differença e o numero dos termos de uma progressão arithmetica, da qual se procura o ultimo termo e a somma. O ultimo acha-se immediatamente ajuntando ao primeiro 22 vezes a differença, o que dá 91 ; quanto á somma, nenhuma difficuldade ha em obtel-a, por isso que é igual a 23 multiplicado por 47, semi-somma dos extremos, que dá 1081.

V.—Pagaram-se 1081 libras em differentes prestações que se excediam todas igualmente de 4 libras, a primeira tendo sido de 3 libras; pergunta-se: 1º qual a ultima, 2º qual o seu numero.

Por isso que o numero 1081 deve ser igual a semi-somma dos extremos multiplicada pelo numero de termos, nós o decomporemos nesses dois factores, o que dará 47 multiplicado por 23. Tomando 47 para semi-somma dos extremos, 23 será o numero dos termos; donde se segue que 2 multiplicado por 47 ou 94 é a somma do primeiro e do ultimo. Ora, a primeira prestação sendo 3 libras, a ultima será 91 libras, e portanto o numero de prestações será 23.

N.B. Convém notar que, em uma progressão arithmetica em que a differença é maior que 2 unidades, a semi-somma dos extremos é maior que o numero dos termos; foi esta consideração que nos levou a tomar aqui 47 para semi-somma e 23 para numero dos termos da progressão.

VI.—Pagou-se uma somma de 1081 libras em 23 prestações que se excediam todas igualmente, a primeira tendo sido de 3 libras; pergunta-se: 1º qual a ultima, 2º qual a differença.

relação de igualdade entre os termos a combinar. Ora, como isso só acontece excepcionalmente, a consequencia é que o problema capital das series é ordinariamente insoluvel.

Similhante impossibilidade nos leva a reconhecer a necessidade de subordinar o ponto de vista abstracto ao ponto de vista concreto, sobretudo para evitar questões inuteis e poupar as nossas forças intellectuaes.

Emfim, tendo em vista tal insolubilidade e a connexão dos problemas das series com a pesquiza das leis numericas dos phenomenos, devemos vêr nessa affinidade a revelação de que taes leis não podem ser descobertas na maioria dos casos, o que revela, ao mesmo tempo, a estreiteza de nossa capacidade inductiva e mesmo deductiva.

Si dividirmos a somma 1081 pelo numero dos termos 23, virá 47 para semi-somma dos extremos; a somma dos extremos será, pois, 94; e porque o primeiro termo é 3, o ultimo será 91. Obtido este, acharemos a differença subtrahindo 3 de 91, e dividindo o resto, 88, por 22, o que dá 4 para essa mesma differença procurada.

VII.—Pagou-se uma somma desconhecida em 23 prestações que se excediam todas igualmente de 4 libras, a ultima tendo sido de 91; pergunta-se: 1º qual foi a primeira, 2º qual a somma de todos os pagamentos.

Si da ultima, 91, tira-se 22 vezes a differença, restará 3 para a primeira que se procura; ajuntando este numero a 91 virá 94, cuja metade multiplicada por 23 dará 1081 para a somma total das prestações.

VIII.—Pagou-se uma somma de 1081 libras em um certo numero de prestações que se excediam todas igualmente de 4 libras, a ultima tendo sido de 91 libras; pergunta-se: 1º qual era o numero das prestações, 2º qual foi a primeira.

Sabendo-se que a somma de todos os termos é igual á semi-somma dos extremos multiplicada pelo numero dos termos, é claro que decompondo 1081 em dois factores, um deverá ser o numero dos termos e o outro a semi-somma dos extremos. Os dois factores são 23 e 47. Assim, tomando 23 para numero dos termos, 47 será a semi-somma dos extremos, donde concluimos que o primeiro é igual ao numero 3.

IX.—Pagou-se uma somma de 1081 libras em 23 prestações que se excediam todas igualmente, sendo a ultima de 91 libras; pergunta-se: 1º qual foi a primeira, 2º qual a differença entre duas quaesquer.

Dividindo 1081 por 23, achamos 47 para semi-somma dos extremos, e, por conseguinte, 94 para a mesma somma, da qual subtrahindo 91, igual ao ultimo termo, virá 3 para o primeiro. Subtrahindo este mesmo numero de 91 e dividindo o resto, 88, pelo numero dos termos diminuido da unidade, que é aqui 22, o quociente, 4, será a differença procurada.

X.—Pagou-se uma somma de 1081 libras em 23 prestações que se excediam todas de 4 libras; pergunta-se: Quaes foram a primeira e a ultima.

Dividindo 1081 por 23, virá 47 para a semi-somma; donde a somma é 94 igual a 2 vezes o primeiro mais 22 vezes a differença; subtrahindo, pois, 88 de 94, virá 6, cuja metade, 3, é igual ao primeiro termo, o que permitte achar 91 para o ultimo. (*Briot-Arithmétique*).

§ λ ϛ' (36)

Avaliação das series dos numeros figurados

453.—Temos visto precedentemente que só em casos mui restrictos era possivel a avaliação das series.

Todavia, vamos mostrar que, apezar de similhante restricção, a sabedoria humana conseguio multiplicar a efficacia theorica e pratica desse pequeno numero de casos soluveis.

E' o que se póde verificar ligando ás progressões arithmeticas algumas outras sommações de series que dellas se derivam a principio directa, depois indirectamente. Entre as primeiras estão as series dos numeros figurados, isto é, dos numeros *triangulares pyramidaes* e etc, que já foram definidas quando estudamos a theoria numerica da ordem. Cada uma se fórma, conforme vimos, pela addição gradual e successiva dos dois, tres, quatro e etc termos da precedente :

Numeros	figurados	de	1ª	ordem	1	2	3	4	5	6	7....
»	»	»	2ª	»	1	3	6	10	15	21	28....
»	»	»	3ª	»	1	4	10	20	35	56	84....
»	»	»	4ª	»	1	5	15	35	70	126	210....
»	»	»	5ª	»	1	6	21	56	126	252	462....
»	»	»	6ª	»	1	7	28	84	210	462	924....

e assim por diante.

Quanto ás outras series, cujas sommações devemos tambem apreciar, derivam-se das precedentes (36a) em-

---

(36) Numero *triákõnta kai héks...* (trinta e seis).

(36a) Blais e Paschal no seu *triangulo arithmetico* considera como numeros figurados de 1ª ordem a serie 1 1 1.... (serie de pontos); como numeros figurados de 2ª ordem a serie 1 2 3.... (serie de linhas); como numeros figurados de 3ª ordem a serie dos triagonaes ou triangulares 1 3 6 10.... (serie de triangulos); e assim por diante.

Nós, porem, consideramos sempre a progressão arithmetica inicial como a serie de 1ª ordem, o que aliás está de accôrdo com o pensamento de Fermat e de outros que se occuparam do assumpto.

T. MENDES

bora de modo diverso daquelle por que estas se derivaram da escala numerica. De sorte que umas e outras procedem desta escala, as primeiras directa e as segundas indirectamente.

454.—Mas, para mostrar como o numero de casos soluveis póde ser multiplicado indefinidamente, basta observar que além das series dos numeros figurados que derivam da progressão arithmetica de razão 1, e que por isso chamaremos de 1ª classe, póde-se conceber uma infinidade de outras partindo das progressões de razão 2, 3, 4, 5....

Assim, tomando a progressão de razão 2 (serie dos numeros impares) e fazendo a addição successiva dos dois, tres, quatro e etc termos, obteremos a serie dos numeros *quadrangulares* ou *quadrados*. Procedendo do mesmo modo em relação a esta, teremos a serie dos numeros *pyramidaes quadrangulares*.

Emfim, fazendo o mesmo com esta serie e com as que forem successivamente obtidas, chegaremos a outras que se succederão indefinidamente, as quaes são chamadas series dos 2ºˢ, 3ºˢ, 4ºˢ e etc *pyramidaes quadrangulares*, para distinguil-as entre si, e das *pyramidaes triangulares* que se acham entre as series figuradas de 1ª classe acima mencionadas. (36b).

Numeros figurados de 2ª classe:

1ª ordem	1	3	5	7	9	..............progressões arithmeticas de razão 2.
2ª »	1	4	9	16	25	....................serie dos numeros quadrados.
3ª »	1	5	14	30	55	..............serie dos pyramidaes quadrangulares.
4ª »	1	6	20	50	105	.... serie dos segundos pyramidaes quadrangulares.
5ª »	1	7	27	77	182	.... serie dos terceiros pyramidaes quadrangulares;

e assim por diante.

Similhantemente, partindo da progressão arithmetica de razão 3, obteremos as series dos numeros figurados de 3ª classe, que além desta progressão comprehendem as dos

(36b) E. Laport.— Methodes Probables de Fermat.—Bordeaux, 1874.

numeros *pentagonaes* e *pyramidaes pentagonaes* de diversos gráos.

Numeros figurados de 3ª classe :

1ª ordem	1 4 7 10 13	...............progressão arithmetica de razão 3.
2ª »	1 5 12 22 35	..................serie dos numeros pentagonaes.
3ª »	1 6 18 40 75	................serie dos pyramidaes pentagonaes.
4ª »	1 7 25 65 140	.........serie dos segundos pyramidaes pentagonaes.
5ª »	1 8 33 98 238	........serie dos terceiros pyramidaes pentagonaes;

e assim por diante.

Partindo da progressão de razão 4, obteriamos do mesmo modo as series dos numeros figurados de 4ª classe onde se acham as dos numeros *hexagonaes*, e dos 1ºˢ, 2ºˢ, 3ºˢ e etc *pyramidaes hexagonaes*.

Partindo da progressão de razão 5, chegariamos ás series dos figurados de 5ª classe, que comprehendem as dos numeros *heptagonaes* e dos diversos *pyramidaes heptagonaes*.

Partindo da progressão arithmetica de razão 6, teriamos os numeros figurados de 6ª classe onde se encontram as series dos numeros *octogonaes* e dos diversos *pyramidaes octogonaes*; e assim por diante.

Em geral, cada termo de uma *serie polygonal* forma-se de uma progressão arithmetica de razão qualquer, addicionando successivamente nella o termo da mesma ordem a todos os que o precedem. O numero de angulos do polygono é sempre igual áquella razão mais dois.

E' assim que vimos a progressão de razão 1 engendrar os numeros triangulares; a de razão 2 engendrar os numeros quadrados; a de razão 3 engendrar os numeros pentagonaes e etc.

Quanto aos numeros pyramidaes, são elles formados com as series polygonaes, da mesma maneira que estas o são com as progressões arithmeticas. (36c).

(36c) Póde-se dizer, como Frenick em suas cartas a Fermat, que os primeiros pyramidaes são progressões de triangulos ou de polygonos, e que os segundos pyramidaes são progressões de pyramides.

Comprehende-se, pois, que, utilisando o caso favoravel das progressões por differença, é possivel effectuar a sommação de uma infinidade de series que dellas derivam.

455.—Estudo da sommação dos numeros figurados. —Todavia, nos occuparemos apenas das series do primeiro grupo, isto é, das que se originam da escala numerica, por serem as mais importantes pelas suas applicações. Demais, resolvido o problema para estas, nenhuma difficuldade ha em fazel-o para as outras, por isso que a marcha é necessariamente a mesma.

Isto posto, consideremos as series dos numeros figurados propriamente ditos. A sua sommação não é para nós uma questão nova.

Comparando os resultados obtidos directamente na solução do problema das *combinações* com aquelles a que chegamos por marcha analoga no das *repartições,* já vimos:

1.° *Que a somma dos termos da serie dos numeros triangulares ou figurados de 2ª ordem, desde o primeiro até um outro qualquer, é igual a um producto de tres factores consecutivos e crescentes, a partir do numero de ordem do ultimo termo, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica.*

2.° *Que a somma dos termos da serie dos numeros pyramidaes triangulares ou figurados de 3ª ordem, desde o primeiro até um outro qualquer, é igual a um producto de quatro factores consecutivos e crescentes, a partir do numero de*

Tem-se uma ideia concreta dessos numeros observando nos nossos arsenaes as pilhas de balas esphericas iguaes, em fórma de pyramide: Si a base desta é um tringulo, a quantidade de balas da pilha fórma um numero pyramidal de 1ª classe; si a base é um quadrado, a quantidade de balas forma um numero pyramidal de 2ª classe; e etc.

Na pilha de base triangular o vertice da pyramide é formado por 1 bala, a camada inferior por 3, a seguinte por 6, a outra por 10 e assim por diante; de modo que o numero de balas das diversas camadas é dado pela serie dos triangulares.

Na pilha de base quadrada, o vertice tem 1 bala, a camada inferior tem 4, a seguinte 9 e etc, segundo a serie dos numeros quadrados.

ordem do ultimo termo, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica.

Donde, portanto, concluimos que a somma dos termos da serie dos 2os pyramidaes triangulares ou figurados de 4ª ordem, desde o primeiro até um outro qualquer, é igual a um producto de cinco factores consecutivos e crescentes a partir do numero de ordem do ultimo termo, dividido pelo producto de igual numero de termos da escala numerica.

Estas conclusões, tiradas da solução do problema das combinações, mostram directamente a connexidade existente entre similhante problema e a sommação destas series. Ao mesmo tempo deixam vêr indirectamente a perfeita equivalencia destas avaliações com o problema das repartições que, como vimos, é uma consequencia do das combinações.

Mas a comparação directa das sommações destas series com os differentes casos do problema das repartições bastaria, por si só, para manifestar similhante equivalencia.

Estudando, com effeito, o problema das repartições, verificamos que em cada caso o numero de repartições de uma ordem é igual á somma das repartições de ordem inferior do numero a repartir e de todos os precedentes até zero.

Ora, comparando os resultados numericos então obtidos pela applicação desta lei com o modo de formação das series dos numeros figurados, reconhecemos immediatamente a inteira equivalencia das duas questões; porque um termo qualquer de cada serie é tambem igual á somma de todos os termos da precedente até aquelle que lhe corresponde.

Além disso, a mesma equivalencia manifesta-se quando comparamos taes sommações com a lei binaria das repartições; porque si um termo qualquer de cada serie é igual á somma do que lhe corresponde na anterior com todos os precedentes, estes são por sua vez iguaes ao termo da antiprecedente, de modo que a expressão final assim obtida toma tambem a fórma binaria, como no caso das repartições.

Reconhecidas equivalentes, estas duas questões devem, pois, comportar a mesma solução que, já formulada para o problema das repartições, torna-se igualmente applicavel aos numeros figurados.

456. — NOVO MEIO DE OBTER A SOMMAÇÃO. — Conhecida a lei geral que preside á sommação de taes series por intermedio do problema das repartições, podemos verifical-a especialmente effectuando de modo directo a sommação dos numeros triangulares 1 3 6 10 15 21 ....

Esta serie sendo formada pela addição successiva dos termos da serie natural, podemos escrevel-a sob a fórma:

1 1 mais 2 1 mais 2 mais 3 1 mais 2 mais 3 mais 4 1 mais 2 mais 3 mais 4 mais 5 ....

Como cada um destes termos é dado pela somma daquelles que pertencem á progressão arithmetica de razão 1, é evidente que podemos escrevel-os do seguinte modo :

$$1 \quad \frac{3 \text{ vezes } 2}{2} \quad \frac{4 \text{ vezes } 3}{2} \quad \frac{5 \text{ vezes } 4}{2} \quad \frac{6 \text{ vezes } 5}{2} \quad \ldots.$$

Effectuando a addição successiva destes termos afim de induzir a lei de sua sommação teremos : $\frac{1 \text{ vez } 2}{2}$ .... primeiro termo ; $\frac{1 \text{ vez } 2 \text{ mais } 3 \text{ vezes } 2}{2}$ igual a $\frac{4 \text{ vezes } 2}{2}$ .... somma dos dois primeiros termos ; $\frac{2 \text{ vezes } 4 \text{ mais } 3 \text{ vezes } 4}{2}$ igual a $\frac{5 \text{ vezes } 4}{2}$ .... somma dos tres primeiros termos.

Parece nada haver de commum entre este resultado e o precedente ; mas, multiplicando por 3 ambos os termos de cada um, obtem-se $\frac{4 \text{ por } 3 \text{ por } 2}{2 \text{ por } 3}$ e $\frac{5 \text{ por } 4 \text{ por } 3}{2 \text{ por } 3}$.

Teremos ainda $\frac{4 \text{ vezes } 5 \text{ mais } 4 \text{ vezes } 5}{2}$ igual a $\frac{2 \text{ vezes } 4 \text{ vezes } 5}{2}$ onde, introduzindo o factor 3 em ambos os termos, obtem-se $\frac{2 \text{ por } 3 \text{ por } 4 \text{ por } 5}{2 \text{ por } 3}$ ou $\frac{6 \text{ por } 4 \text{ por } 5}{2 \text{ por } 3}$, ou finalmente $\frac{4 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{2 \text{ por } 3}$ para a somma dos quatro primeiros termos.

Sommando o resultado precedente ao termo seguinte, virá : $\frac{4 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{2 \text{ por } 3}$ mais $\frac{5 \text{ por } 6}{2}$ igual a $\frac{4 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{2 \text{ por } 3}$

mais $\frac{3 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{2 \text{ por } 3}$ igual a $\frac{7 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{2 \text{ por } 3}$ igual finalmente a $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{2 \text{ por } 3}$ que é a somma dos cinco primeiros termos.

Addicionando o resultado precedente ao termo seguinte, vem: $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{2 \text{ por } 3}$ mais $\frac{6 \text{ por } 7}{2}$ igual a $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{2 \text{ por } 3}$ mais $\frac{3 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{2 \text{ por } 3}$ igual a $\frac{8 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{2 \text{ por } 3}$ igual finalmente a $\frac{6 \text{ por } 7 \text{ por } 8}{2 \text{ por } 3}$, que é a somma dos seis primeiros termos.

Comparando todos estes resultados, conclue-se immediatamente que a somma dos sete primeiros termos será $\frac{7 \text{ por } 8 \text{ por } 9}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$; que a somma dos oito primeiros termos será $\frac{8 \text{ por } 9 \text{ por } 10}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$; e assim por diante.

O resultado está, pois, de accôrdo com o já obtido pela lei das repartições.

A marcha que acabamos de seguir, comquanto trabalhosa, conduziria tambem á determinação da somma de um numero qualquer de termos das series pyramidaes. Não insistiremos, porém, sobre taes sommações, porque ellas serão realisadas em Algebra por modo muito mais expedito. Basta haver concebido o processo em questão para tirar delle todas as vantagens logicas que comporta.

Todavia, considerada scientificamente, esta marcha tem ainda a vantagem de nos conduzir á sommação de certas series que se relacionam com as dos numeros figurados.

Com effeito, acabamos de vêr que effectuar a somma dos numeros triangulares ou figurados de 2ª ordem, equivale a addicionar successivamente $\frac{1}{2}$ dos productos de 1 vez 2 2 vezes 3 3 vezes 4 4 vezes 5....

Portanto, para ter a somma de um numero qualquer de termos desta serie, formada pelos productos dos numeros inteiros considerados dois a dois em sua ordem natural, bastará tomar o dobro da somma do numero correspondente de termos da serie triangular.

Assim, por exemplo, a somma dos vinte primeiros productos será igual a 2 vezes $\frac{20 \text{ vezes } 21 \text{ vezes } 22}{2 \text{ vezes } 3}$ ou a $\frac{20 \text{ vezes } 21 \text{ vezes } 22}{3}$.

Applicando a marcha acima á determinação da somma de um numero qualquer de termos da serie dos pyramidaes triangulares, póde-se verificar que fazer similhante sommação equivale a addicionar successivamente $\frac{1}{2 \text{ vezes } 3}$ ou $\frac{1}{6}$ dos productos de 1 vez 2 vezes 3 2 vezes 3 vezes 4 3 vezes 4 vezes 5 4 vezes 5 vezes 6....

Portanto, para ter a somma de um numero qualquer de termos desta serie, formada como se vê pelo producto dos numeros inteiros considerados 3 a 3, em sua ordem natural, bastará tomar 6 vezes a somma do numero correspondente de termos da serie dos pyramidaes triangulares ou figurados de 3ª ordem.

Assim, por exemplo, a somma dos dez primeiros termos da serie de taes productos equivalerá a 6 vezes $\frac{10 \text{ por } 11 \text{ por } 12 \text{ por } 13}{2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ ou a $\frac{10 \text{ por } 11 \text{ por } 12 \text{ por } 13}{4}$ igual a 4290.

Raciocinando do mesmo modo chegariamos á conclusão de que, para ter a somma de um numero qualquer de termos da serie formada, como se vê, pelos productos dos numeros inteiros considerados 4 a 4 em sua ordem natural, bastaria tomar 2 vezes 3 vezes 4 ou 24 vezes a somma do numero correspondente de termos dos figurados de 4ª ordem; e assim por diante.

Por exemplo, a somma dos cinco primeiros termos de tal serie seria equivalente a 2 vezes 3 vezes 4 multiplicado por $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7 \text{ por } 8 \text{ por } 9}{2 \text{ por } 3 \text{ por } 4 \text{ por } 5}$ ou a $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7 \text{ por } 8 \text{ por } 9}{5}$.

460.—Da sommação dos numeros figurados deduz-se a das potencias correspondentes dos numeros inteiros, por isso

que cada uma dessas potencias equivale á somma de alguns dentre elles, ou de seus multiplos fixos.

E' assim, por exemplo, que, fazendo a somma dos numeros triangulares consecutivos, tomados 2 a 2, obteremos a serie dos numeros quadrados, 4 9 16 25 36 49....

Podemos, pois, olhar todo o quadrado como sendo igual á somma de dois numeros triangulares consecutivos, o que, aliás, a propria figura concorre tambem para indicar, porque cada quadrado póde ser obtido pela juxtaposição de dois triangulos.

Similhantemente, fazendo a somma de tres numeros pyramidaes triangulares consecutivos, depois de haver multiplicado o intermediario por 4, obteremos successivamente a serie das 3as potencias ou dos cubos, 27 64 125 216 343....

Assim, tambem, fazendo a somma de quatro numeros figurados de 4^{a} ordem consecutivos, depois de haver multiplicado por 11 cada um dos dois intermediarios, obteremos a serie das 4as potencias, 256 625 1296 2401 4096....

Relativamente ás 5^{a}, 6^{a}, 7^{a}.... potencias, somos levados a suppôr que as series respectivas serão formadas combinando 5, 6, 7.... termos consecutivos das series dos numeros figurados de 5^{a}, 6^{a}, 7^{a}.... ordens.

Mas é inutil proseguir em similhante pesquiza, porque a Algebra nos fornecerá meios mais simples e directos de obter as sommações das potencias correspondentes; donde resultará reciprocamente o novo meio de instituir a sommação dos numeros figurados.

Entretanto, vamos mostrar como se póde utilisar o modo de dependencia entre as series das potencias e a dos numeros figurados para realizar a sommação de um numero qualquer de seus termos.

1.° Consideremos, a principio, a serie dos quadrados, 1 4 9 16 25...., derivada, como vimos, da serie triangular,

1 3 6 10 15...., e procuremos, por exemplo, determinar a somma dos seus cinco primeiros termos.

Attendendo ao seu modo de formação, isto é, que o numero quadrado equivale á somma de dois numeros triangulares successivos, dos quaes o maior é aquelle que lhe corresponde, podemos escrevel-a do seguinte modo:

1 1 mais 3 3 mais 6 6 mais 10 10 mais 15 ....

A somma dos cinco primeiros quadrados comprehende, como se vê, os cinco primeiros numeros triangulares, 1 mais 3 mais 6 mais 10 mais 15 repetidos duas vezes, á excepção do ultimo, 15, que apenas figura uma vez.

Nestas condições, sendo conhecido o ultimo numero triangular que corresponde ao ultimo dos numeros quadrados cuja somma se procura, é evidente que para obter esta somma bastará tomar o dobro da somma dos numeros triangulares correspondentes, e diminuil-a do ultimo desses numeros.

Assim, a somma dos cinco primeiros numeros quadrados será igual a 2 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ menos $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2}$; invertendo na primeira destas fracções a ordem do factor 7, e introduzindo em ambos os termos da segunda o factor 3, virá: 14 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ menos 3 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ o que equivale evidentemente a 11 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$, igual a 55. Sendo 11 equivalente a *2 vezes 5 mais 1*, o resultado obtido é igual ao producto desta somma pela fracção $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$.

O raciocinio que acabamos de fazer tem a mesma applicação, qualquer que seja o numero de termos da serie dos quadrados.

Supponhamos ainda que se quer a somma dos vinte primeiros quadrados: A somma dos vinte primeiros triangu-

lares equivale a $\frac{20 \text{ por } 21 \text{ por } 22}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$; o vigesimo numero triangular é igual a $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2}$. Subtrahindo esta expressão do dobro daquella, ter-se-ha 2 vezes $\frac{20 \text{ por } 21 \text{ por } 22}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ menos $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2}$, igual a 44 vezes $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ menos 3 vezes $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$, o que equivale evidentemente a 41 vezes $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ ou 2870. Sendo 41 o mesmo que 2 vezes 20 mais 1, o resultado obtido é igual ao producto desta somma pela fracção $\frac{20 \text{ por } 21}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$.

Poder-se-hia determinar a somma dos numeros quadrados partindo da serie dos numeros impares, e procedendo para com esta do mesmo modo que fizemos em relação á serie natural para obter a somma dos numeros triangulares. Com effeito, decompondo cada numero quadrado nos numeros impares de que é a somma, sommar-se-hia do mesmo modo os numeros quadrados.

2.° Consideremos agora a serie dos cubos, 1 8 27 64 125 216.... que se deriva da serie dos numeros pyramidaes triangulares, 1 4 10 20 35...., porquanto vimos que para formar o cubo de um numero qualquer basta addicionar o numero pyramidal triangular da mesma ordem ao antiprecedente, e juntar á somma obtida o quadrpulo do intermediario.

Sabendo effectuar a sommação de um numero qualquer de termos da serie dos pyramidaes triangulares, póde-se fazer o mesmo para a dos cubos, utilisando aquella dependencia existente entre ambas.

Para comprehendel-o, supponhamos que se trata de obter a somma dos cinco primeiros cubos. Attendendo ao seu modo de formação por meio dos numeros figurados de 3ª ordem, podemos escrevel-os do seguinte modo: 1 1 vez 4 mais 4 10 mais 1 mais 4 vezes 4 20 mais 4 mais

4 vezes 10   35 mais 10 mais 4 vezes 20.... Para ter a somma procurada, basta notar:

a) que todos os numeros pyramidaes figuram a principio uma vez; *b)* que depois todos elles se acham repetidos 4 vezes, com excepção do ultimo; *c)* que finalmente todos figuram ainda uma vez com excepção do penultimo.

A consequencia é, portanto, que todos se acham repetidos 6 vezes, com excepção do ultimo, que apenas figura 1 vez, e do penultimo, que se acha repetido 5 vezes.

Tomando, por conseguinte, 6 vezes a somma dos 5 primeiros numeros pyramidaes e subtrahindo deste producto 5 vezes o ultimo, e 1 vez o penultimo, ter-se-ha obtido a somma procurada.

Teremos, pois, 6 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7 \text{ por } 8}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ menos 5 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ menos $\frac{4 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3}$ ou 48 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ menos 20 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ menos 4 vezes $\frac{4 \text{ por } 5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ igual a 28 vezes $\frac{5 \text{ por } 6 \text{ por } 7}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ menos 16 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ igual a 196 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ menos 16 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ igual a 180 vezes $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$ igual a 225. Sendo 180 equivalente ao producto de 5 pelo quadrado de 5 mais 1, ou 6, vê-se que se obtem o resultado precedente multiplicando simplesmente este producto pela fracção $\frac{5 \text{ por } 6}{1 \text{ por } 2 \text{ por } 3 \text{ por } 4}$, o que importa em quadrar o numero 5, cubar 6 e dividir o producto dessas potencias pelo denominador daquella fracção.

Applicando esta marcha para achar a somma dos vinte primeiros cubos, formaremos o quadrado de 20, o cubo de 21 e dividiremos o producto delles pelo dos quatro primeiros numeros, encontrando-se assim 154350.

O raciocinio que acabamos de fazer podendo se applicar a um numero qualquer de termos da serie dos cubos, vê-se que o processo que instituimos tem toda a generalidade.

Relativamente ás 4as, 5as.... potencias, poderiamos resolver o problema analogo, notando que seria preciso combinar respectivamente 4, 5.... numeros figurados de 4^{a}, 5^{a}.... ordens. Todavia, como esta questão complica-se cada vez mais, á medida que se augmenta o grão da potencia, julgamos excusado ir mais longe, porque ella deve receber em Algebra uma solução simples e directa.

461. — Exame das diversas ordens de progressão por differença. — Todos os mathematicos que se occuparam dos numeros figurados, desde Diophante até Descartes e Fermat, observaram que as series das potencias, com excepção apenas da dos quadrados, não se acham entre os numeros figurados.

Fermat, que estudou o assumpto mais profundamente, notou que se devia attribuir similhante excepção á propriedade que tem a serie dos quadrados de ser a unica dentre as potencias onde um certo termo póde ser igual á differença entre dois outros. (36d)

Todavia, conforme vimos acima, foi possivel fazer depender todas as series das potencias inteiras das dos numeros figurados, e, por conseguinte, reduzir sua sommação á de simples progressão por differença. Ora, similhante reducção levou naturalmente o espirito humano a generalisar a ideia de progressão arithmetica, de modo a abranger numa unica concepção todas as series reductiveis a simples *progressões por differença*.

Foi o que se conseguiu concebendo as diversas ordens de progressões por differença.

Assim, chamou-se *progressão por differença de 1ª ordem* á serie que guarda de um termo qualquer para o immediato uma *differença constante*; *progressão por diffe-*

(36d) E' assim, por exemplo, que o quadrado de 5 menos o quadrado de 4 equivale ao quadrado de 3; assim tambem o quadrado de 10 menos o de 8 equivale ao de 6.

rença de 2ª ordem áquella em que as differenças successivas de um termo a outro formam entre si uma progressão por differença de 1ª ordem; *progressão por differença de 3ª ordem* áquella cujas differenças successivas formam entre si uma progressão por differença de 2ª ordem; *progressão por differença de 4ª ordem* áquella onde as differenças successivas formam entre si uma progressão por differença de 3ª ordem; e assim por diante. (36e)

Como as differenças successivas, tomadas desde a progressão inicial até a final de 1ª ordem, tornam-se constantes nesta ultima, póde-se dizer que progressões por differença de 1ª, 2ª, 3ª, 4ª .... ordens são aquellas cujas 1ªs, 2ªs, 3ªs 4ªs.... differenças são respectivamente constantes.

Assim, a serie dos cubos é uma progressão por differença de 3ª ordem, porque se tem:

Serie dos cubos	1 8 27 64 125 216....
Serie das primeiras differenças	7 19 37 61 91....
Serie das segundas differenças	12 18 24 30....
Serie das terceiras differenças	6 6 6....

Pela mesma razão a serie dos quadrados é uma progressão por differença de 2ª ordem, porque se tem:

Serie dos quadrados	1 4 9 16 25....
Serie das primeiras differenças	3 5 7 9....
Serie das segundas differenças	2 2 2....

Do mesmo modo verificar-se-hia que as series das 4ªs, 5ªs, 6ªs....potencias são progressões por differença de 4ª, 5ª, 6ª.... ordens, e que tambem as series dos numeros figurados de 1ª, 2ª, 3ª, 4ª....ordens de qualquer classe, são progressões por differença de 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.... ordens; de maneira que estas e aquellas series pertencem á mesma categoria de progressões árithmeticas.

(36e) C. Kramps. — Elemens d'Arithmétique Universelle. Cologne, 1808.

A concepção das progressões por differença de diversas ordens approxima, pois, as series das potencias inteiras das series dos numeros figurados de diversas ordens. Ella permitte, além disso, incluir nesta immensa categoria de progressões arithmeticas um grande numero de outras progressões, que, á primeira vista, parece não lhe pertencer.

Estão, por exemplo, neste caso, as progressões que se obtem multiplicando termo a termo 2, 3, 4.... progressões arithmeticas de 1ª ordem, cujos productos formarão progressões por differença de 2ª, 3ª, 4ª.... ordens.

Assim é que a progressão, 0 30 108 234 408...., que resulta da multiplicação termo a termo das duas progressões por differença, 1 5 9 13 17.... e 0 6 12 18 24...., é de 2ª ordem. As suas 2as differenças são, com effeito, constantes, como se vê em seguida: 0 30 108 234 408....30 78 126 174....48 48 48...

Si os termos das duas progressões por differença fossem iguaes, a progressão resultante de 2ª ordem seria a dos quadrados correspondentes.

Assim, tambem, a progressão 120 1287 4760 11799 23664.... é de 3ªordem, porque resulta da multiplicação termo a termo das tres progressões seguintes de 1ª ordem, 4 9 14 19 24.... 5 11 17 23 29.... 6 13 20 27 34....

Tomando, com effeito, as differenças successivas daquella progressão, e fazendo seguidamente o mesmo com os resultados obtidos, verifica-se serem constantes as 3as differenças: 120 1287 4760 11799 23664....1167 3473 7039 11865.... 2306 3566 4826.... 1260 1260 1260....

Si os termos das tres progressões por differença de 1ª ordem fossem iguaes, a progressão resultante de 3ª ordem seria a dos cubos.

Estes resultados nos mostram que é possivel conceber uma infinidade de outras series, todas ellas ligadas a sim-

ples progressões arithmeticas, e nos fazem antever, ao mesmo tempo, a possibilidade de resolver para todas os problemas capitaes de que nos occupamos naquellas progressões.

Mas, similhantes soluções complicam-se cada vez mais, por causa da necessidade de ter constantemente em vista as relações existentes entre os numeros combinados. Ellas nos fazem, pois, aspirar a instituição de um novo calculo, onde taes soluções sejam de preferencia elaboradas.

462.—Só nos resta observar que o estudo da theoria dos numeros figurados vem mais uma vez patentear a efficacia especial da *inducção* nos estudos mathematicos, que passam por ser meramente *deductivos*. Mas, além disso, uma tal theoria demonstra, sobretudo, a superioridade da *inducção systematica* sobre a *inducção empirica*.

Ainda que se ignorasse a lei final das repartições, bem como a dos numeros figurados, poder-se-hia legitimamente induzir sua identidade necessaria pela simples comparação das constituições elementares dos dois casos, segundo sua natureza respectiva.

A fórma das combinações torna-se assim a fonte de duas soluções que pareceriam inteiramente independentes de um tal problema, si a inducção não tivesse convenientemente ligado as tres questões. Embora a constituição binaria das fórmas respectivas possa mostrar deductivamente sua inteira coincidencia, similhante confirmação não é de modo algum indispensavel para autorisar o uso da descoberta inductiva.

Emfim, a theoria dos numeros figurados, como a das progressões, faz sentir directamente a necessidade de generalisar o espirito das soluções arithmeticas.

A complicação crescente das fórmulas obtidas e a obrigação que nos impõem de fazer prevalecer cada vez mais o ponto de vista das relações sobre o dos valores dos seus elementos, nos annunciam, desde já, o espirito das

soluções que convêm ao *Calculo Algebrico*, e nos fazem aspiral-as.

Historicamente considerada, a theoria dos numeros figurados, como em geral as propriedades dos numeros, muito contribuiu para o advento deste novo calculo. Cumpre notar, a esse respeito, que o primeiro trabalho em que a Algebra foi divulgada no Occidente (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum — De multangulis numeris* e etc), foi tambem o primeiro que se occupou das propriedades geraes dos numeros figurados.

CONCLUSÃO

Habent sua fata libelli.

TERENTIANUS MAURUS

(Resumo, juizo e resultados)

O conjuncto deste volume institue successivamente cada uma das tres partes normalmente proprias ao Calculo Arithmetico.

Podemos, pois, julgar sobre todos os aspectos essenciaes o caracter definitivo do dominio inicial da sciencia mathematica e determinar os principaes resultados de sua regeneração synthetica.

Mas, para isso, torna-se preciso lançar um golpe de vista sobre o estudo que acaba de ser feito afim de melhor apreciar a progressão geral que o constitue.

O conjuncto da Arithmetica pura offerece, com effeito, tres partes distinctas : *a theoria subjectiva dos numeros*, que a liga de um lado á Philosophia Primeira e de outro, á Moral ; *a theoria da numeração*, onde reside seu caracter essencial, *e a theoria das avaliações* donde resulta sua ligação á Physica. Devemos sempre considerar a ultima parte como emanada da precedente e presidindo a seguinte, que constitue o Calculo Arithmetico propriamente dito.

A theoria subjectiva dos numeros nos desvenda o germen das concepções numericas, mostrando-nos, ao mesmo tempo, a universalidade de taes concepções, indelevelmente impressas em quasi todos os vocabulos das linguas antigas e modernas. Explicando esse predominio universal das concepções numericas, mostramos que elle resulta da nossa constituição affectiva.

A distincção abstracta entre a singularidade e a pluralidade é mesmo incomprehensivel entre uma especie sem *altruismo*, porque só a sociabilidade nos permitte formar idéa de *collectividade* ou *pluralidade*.

Ao mesmo tempo mostramos que era á logica do sentimento que deviamos a especificação dos gráos iniciaes da pluralidade, isto é, dos numeros um, dois e tres. Mas vimos que as condições exteriores se juntaram bem depressa aos estimulos subjectivos para fixar estes tres primeiros numeros.

Nesse sentido cumpre reconhecer que o Céo, primeiramente, e depois o Sol representam o maior desses estimulos objectivos. A singularidade de cada um delles tende a dar á noção de *unidade* um caracter objectivo.

Ao mesmo tempo *dois* era caracterisado pelo Céo e o Sol, ou pelo Sol e a Lua Cheia, pelo Dia e a Noite, pela Terra e o Céo e pela Terra e a Agua.

Tres encontrou uma applicação no grupo Céo, Sol e Lua, ou Terra Agua e Céo, e nas tres phases primitivas da Lua, pois é sabido que a Lua Nova não era considerada como uma phase distincta. Ha finalmente varios grupos de tres estrellas que bem podiam ter servido para objectivar o numero tres.

O corpo humano apresenta, tambem, concretisação dos numeros iniciaes um e dois: cabeça e pares de membros.

Essa multiplicidade de representações concretas, familiares e continuas, tende a facilitar a concepção abstracta dos tres primeiros numeros (*inducção*); a generalisar o seu predominio, procurando-os por toda a parte (*deducção*), e emfim a empregal-os systematicamente para reduzir a elles todas as concepções numericas (*construcção*).

Com effeito, ao mesmo tempo que os *numeros sagrados* tendiam a introduzir-se por toda a parte, determinando approximações e separações, as condições espontaneas da vida levaram a fixar desconnexamente outros grupos. Entre estes,

occupa o primeiro lugar *cinco*, ligado á constituição geral de nosso corpo (mão, pé — cinco dedos, cabeça e pares de membros e numero de sentidos).

Essas *construcções*, *deducções* e *inducções* iniciaes foram dirigidas sempre pelo predominio da razão concreta, pois que a attenção se fixava sobre os grupos conforme o interesse que despertavam no conjuncto da existencia humana.

Vimos que na construcção dos numeros a partir de tres, as considerações subjectivas se tornam, então, sobretudo sociaes, em vez de serem simplesmente domesticas. Dissemos, com effeito, que *quatro*, *seis* e *sete* surgiram da contemplação de agrupamentos de familias, sem filhos ou com elles.

Esses numeros, e bem assim os que delles resultaram, foram logo encontrando verificação concreta, sobretudo na enumeração dos astros que já eram objecto de adoração especial (fetichismo astrolatico).

A systematisação abstracta das concepções numericas iniciaes, effectuada pelos theocratas, levou-os naturalmente a objectivar todos os numeros, que desde então foram concebidos como seres exteriores, como as demais abstracções. Instituidos os primeiros numeros, e constituidas como vimos as unidades collectivas concretas, a construcção da escala numerica apenas exigia que o conjuncto das necessidades subjectivas e objectivas a solicitassem.

Para concluir esta succinta apreciação da theoria subjectiva dos numeros e tirar della todos os proveitos moraes e intellectuaes de que é susceptivel, vamos indicar summariamente o ascendente que o emprego subjectivo dos numeros foi obtendo cada vez mais, até a regulamentação numerica da existencia humana, e bem assim o termo desta regulamentação, isto é, a sua systematisação definitiva.

Para isto notemos a principio que o dominio subjectivo dos numeros é muito mais vasto do que o seu imperio obje-

ctivo; porque os numeros podem ser subjectivamente introduzidos em assumptos nos quaes a sua admissão objectiva seria inexequivel.

A 14ª lei de Philosophia Primeira (classamento) indica a extensão gradual do emprego subjectivo dos numeros. Para constatal-o, devemos considerar:

1°, a jerarchia das sciencias;

2°, a jerarchia das artes (estheticas ou moraes);

3°, a jerarchia dos officios.

1.° Na jerarchia scientifica, o emprego subjectivo dos numeros tem por objecto, já coordenar as nossas concepções, já permittir a passagem do abstracto para o concreto.

2.° Na jerarchia das artes estheticas, o emprego subjectivo dos numeros tem por fim dissipar a indecisão e approximar o mais possivel a expressão da concepção, subordinando cada vez mais o egoismo ao altruismo.

Jerarchia esthetica . . . .
- Poesia
  - verso
  - prosa
- Musica
- Pintura
- Esculptura
- Architectura

3.° Na jerarchia dos officios, o emprego subjectivo dos numeros tem por fim regulamentar a existencia pratica, augmentando cada vez mais a synergia dos esforços, garantindo o ascendente da moralidade e da previsão.

Jerarchia pratica . . . .
- Artes superiores
  - Moral
  - Politica
- Artes inferiores
  - Biologicas
  - Chimicas
  - Physicas
  - Astronomicas
  - Mathematicas

Examinemos sobre cada um destes tres aspectos o emprego subjectivo dos numeros.

1.° Na jerarchia scientifica, a precisão rarissimas vezes é possivel objectivamente, mesmo na Logica, isto é, em Mathematica.

Por exemplo, é impossivel exprimir exactamente, na generalidade dos casos, a grandeza do lado de um quadrado de superficie conhecida ; não é possivel determinar exactamente o comprimento de uma circumferencia de raio dado, o volume da esphera pelo seu raio, e etc.

Isto conduziu a substituir as *relações precisas* pelas *relações approximadas*. Ora, essa substituição consiste em uma applicação subjectiva dos numeros.

Mas o predominio subjectivo dos numeros faz-se sentir em Logica desde a instituição Arithmetica, porque a constituição systematica da escala numerica é impossivel sem a escolha de uma base. Ora, essa escolha é subjectiva, porque a ordem exterior não nos impõe nenhuma.

E' verdade que a substituição dos numeros approximados só se faz aos numeros exactos quando a determinação destes é impossivel. Mas, similhante substituição nos é imposta ordinariamente.

O surto da vida industrial e a sua reacção sobre a evolução mental determinou, com effeito, não só a substituição dos *incommensuraveis* pelas fracções, como as *fracções ordinarias* pelas *fracções basicas* ; ou as fracções ordinarias por outras de menores termos *(fracções continuas)*, conforme veremos em Algebra.

Em todos esses casos trata-se de estabelecer theoricamente uma ligação entre as grandezas continuas e as pluralidades ou grandezas descontinuas ; e, praticamente, se visa adaptar cada vez mais a sciencia ao seu destino exterior, isto é, permittir a passagem do abstracto para o concreto. As concepções tornam-se, assim, ao mesmo

tempo, mais *realisaveis* e mais *relativas,* tornando-se mais *subjectivas.*

Não insistiremos agora em outras observações para demonstrar o ascendente da instituição subjectiva dos numeros em toda a Logica, porque teremos occasião de o assignalar no decurso de tal estudo.

A partir da Astronomia, o emprego subjectivo dos numeros vae, cada vez mais, prevalecendo sobre o seu uso objectivo, mediante a instituição dos numeros que tem por fim subordinar progressivamente a analyse objectiva á synthese subjectiva.

Tal é, por exemplo, o destino dos numeros a que chamamos *medias* ; tal é, tambem, o destino dos numeros que circumscrevem os objectos da contemplação ou os gráos da analyse theorica.

Exemplos :

Physica. . . { Astronomia: Limitação dos numeros dos astros do nosso mundo. Instituição das *médias* na representação das grandezas celestes.
Physica propriamente dita: Medias, etc.
Chimica, Idem, idem. }

Moral . . . { Biologia: Medias nas dimensões dos orgãos ; gráos da analyse, etc.
Sociologia: Phases da historia, etc.
Moral propriamente dita: Constituição numerica da alma, etc. }

O predominio crescente dos numeros subjectivos na jerarchia theorica importa, por sua vez, na preponderancia crescente do methodo constructivo sobre os methodos inductivo e deductivo.

2.° Na jerarchia esthetica, observa-se tambem o ascendente do emprego subjectivo dos numeros :

Poesia . . . . { Verso — metrificação.
Prosa — idem (*) }

(*) Observa-se por toda a parte uma tendencia manifesta em metrificar tambem a prosa, regularisando o numero de proposições de cada periodo de modo a não ficar este muito extenso. A. Comte systematisou esta ten-

Musica	Melodia Harmonia
Pintura	Proporções
Esculptura	Idem.
Architectura	Symetria; distribuição das massas.

3.º Para apreciar o emprego subjectivo dos numeros na jerarchia pratica, devemos distinguir as artes superiores das inferiores. As primeiras são a Moral pratica e a Politica, as quaes se decompõem como se vê em seguida:

ARTES SUPERIORES

Moral pratica		*Instituição fundamental das idades.* *Culto*: instituição do calendario, etc. *Dogma*: distribuição do ensino, numero de lições, etc. *Regimen*: vida vegetativa — horas de refeições e etc.; vida intellectual — horas de cultura theorica e esthetica; vida pratica — numero de horas de trabalho, de repouso, etc.
Politica	Politica espiritual ou sacerdotal	Estatistica da constituição das familias, das patrias, do sacerdocio, do patriciado, do proletariado, etc.
	Politica temporal ou governamental.	Estatistica da producção e do consumo; condições numericas do capital, donde taxa das permutas, impostos, juros; estatistica geral da população, estatistica especial de cada industria, etc.

---

dencia submettendo os *trabalhos philosophicos* a prescripções similhantes ás usadas para os poemas. Segundo elle, um tratado philosophico deve ter 7 capitulos, fóra a *introducção* e a *conclusão*; cada capitulo 3 partes, cada parte 7 secções e cada secção 7 grupos de phrases separadas pelos alineas usados. Além disso elle regularisou a composição de cada grupo de phrases, e reduziu cada uma destas a 5 linhas impressas de 50 lettras ou a 250 lettras no maximo.

Quanto á composição de um *poema*, deve ser de 13 cantos, dos quaes 3 de introducção, 7 de desenvolvimento e 3 de conclusão. Regularisou, tambem, a divisão dos cantos, a igualdade das estrophes e dos versos e a decomposição destes.

ARTES SUBALTERNAS OU INFERIORES

O emprego subjectivo dos numeros nas artes subalternas é muito frequente na fixação das medidas capitaes e mesmo, muitas vezes, nas medidas secundarias. E' o que se observa em todas estas artes, que podem ser *biologicas, chimicas, physicas, astronomicas* e *mathematicas*.

Emfim, as considerações precedentes nos mostram claramente que a theoria subjectiva dos numeros, isto é, o estudo das leis numericas da existencia humana, só póde ser constituida definitivamente na *moral theorica* e *pratica*, por um lado, e na *theoria da industria positiva*, por outro.

A theoria subjectiva dos numeros offerece o primeiro exemplo das vantagens reciprocas da união dos estudos inferiores aos superiores. Os numeros occupam o ultimo lugar na escala das abstracções positivas. Entretanto adquirem moralmente uma dignidade constante, em consequencia de sua applicação á regulamentação da existencia individual ou collectiva.

Systematisando esta theoria, A. Comte demonstrou não só a possibilidade mas até a necessidade de similhante regulamentação.

Com effeito, todos os phenomenos devem ser concebidos como regidos por leis numericas. Mas a complexidade delles difficulta cada vez mais a determinação dessas leis á medida que se complicam.

Dahi a insufficiencia das leis naturaes para prever os phenomenos e, portanto, para regular o nosso sentimento e a nossa actividade.

O vago que dahi resulta só póde ser favoravel ao egoismo; e como o problema humano resume-se na subordinação deste instincto ao altruismo, resulta a necessidade de eliminal-o. Para isso é preciso supprir as leis naturaes ou fataes

por leis artificiaes ou voluntarias, traduzidas subjectivamente por numeros, cuja simplicidade e generalidade determinam sua fixidez, que persiste mesmo nos casos pathologicos.

Para conceber a possibilidade de completar as leis naturaes pelas leis artificiaes, basta attender que os phenomenos humanos, embora os mais complicados, são tambem os mais modificaveis. A modificabilidade diz, apenas, respeito á intensidade dos phenomenos, cujo arranjo persiste inalteravel (3ª lei de Philosophia Primeira); e esta lei traça o campo de nossa intervenção.

A efficacia da regulamentação resulta da nossa existencia collectiva; e o conjuncto das leis da animalidade tende a tornar naturaes as leis artificiaes, fixando-as pelo habito, pela hereditariedade, etc.

Finalmente, as leis artificiaes podem e devem adquirir a precisão numerica para dissiparem a duvida, a hesitação e a indecisão. Cumpre, porém, ter em vista que o emprego destas leis numericas e artificiaes não attende senão aos casos principaes. Fóra dahi a regulamentação systematica torna-se insufficiente, em vista da impossibilidade de prever todos os accidentes da existencia individual, bem como da existencia collectiva, apezar da maior simplicidade desta.

*
* *

« Ligada á theoria subjectiva dos numeros, a *numeração* ahi tem suas raizes espontaneas, e mesmo seus principios systematicos, em virtude da transformação gradual dos numeros *ordinaes* em *cardinaes*.

Destinada, a principio, á contagem directa, ella poderia conservar por muito tempo sua constituição primitiva ou espontanea, si as necessidades praticas, industriaes ou militares não viessem habitualmente suscitar numeros muito

consideraveis. Desde então a escala numerica teve de servir não só para *contar*, mas, sobretudo, para *calcular*.

Comprehende-se, com effeito, que para contar, isto é, para distinguir cada numero do precedente e do seguinte, bastariam nomes quaesquer, mesmo incoherentes, desde que não suscitassem nenhuma omissão nem repetição. O mesmo, porém, não teria lugar para calcular, isto é, para avaliar uma combinação numerica cujos elementos são conhecidos.

Com effeito, a menos complicada, mesmo uma addição, exigiria longos e fastidiosos esforços, desde logo sujeitos a inevitaveis erros, si fosse mistér procedel-a por contagem directa, sem que os numeros considerados fossem superiores áquelles que poderiamos separadamente contar.

Uma systematisação da escala numerica tornou-se, pois, indispensavel, não para contar, mas para calcular, logo que o dominio arithmetico se desenvolveu; e isto teve lugar no fim da edade fetichica, quando surgiu o regimen sedentario.

Assim, depois de haver instituido a numeração espontanea, a arithmetica ordinal ou subjectiva fez indirectamente surgir a numeração systematica. Dispondo os numeros por grupos iguaes, essa systematisação torna afinal compostos os nomes primitivamente simples, fazendo-os designar a principio a que grupo pertence cada numero, e depois o lugar que ahi occupa.

Successivamente elaborada pelo fetichismo e pela theocracia, a escala numerica se nos apresenta hoje como uma jerarchia de grupos construidos sob dois typos. Esses grupos são representados por um duplo systema de signaes phonicos e graphicos, como as demais concepções condensadas pela linguagem.

O primeiro dos typos a que nos referimos consiste na fixação immediata de alguns dos gráos successivos iniciaes da pluralidade. São esses gráos que formam as abstracções

chamadas *numeros simples*, que na linguagem fallada ou escripta são representados por um signal empirico.

O segundo typo repousa na instituição das ***unidades compostas***, as quaes são apenas pluralidades que se considera como formando um só todo. Os signaes complexos que representam taes unidades resultam de uma combinação que traduz a constituição dellas.

O fundamento de similhante combinação é que uma unidade de ordem qualquer se forma sempre por um certo numero de unidades da ordem immediatamente inferior, sendo esse numero a taxa de agrupamento gradual, que chamamos base da numeração. Para valor desta, os theocratas escolheram o numero dez, levados naturalmente pelo habito de contar pelos dedos. Mas essa escolha empirica não podia, de certo, ser definitiva ; e A. Comte demonstrou, como vimos, que devia ser sete a base preferida.

Guiada pela nomenclatura, a notação da escala numerica foi por seu turno se aperfeiçoando.

Simplificando a escriptura directa, vimos que os gregos e os romanos adoptaram, sob formas diversas, a escriptura alphabetica que em todo o Occidente foi gradualmente substituida pela notação de origem hierogliphica, já então muito conhecida. Inventada pelos theocratas, esta ultima institue signaes especiaes para os numeros elementares, e designa o gráo de composição pelo lugar dos mesmos signaes ou algarismos.

A escriptura dos numeros attingiu, assim, ao seu aperfeiçoamento extremo, em virtude da tendencia constante do entendimento humano em proceder do geral para o particular na enunciação, e, principalmente, na applicação de um classamento qualquer.

Foi essa disposição que fez nascer o habito de ler um numero, enunciando a principio as unidades mais elevadas, e em seguida as menores, na sua ordem de succession.

Em consequencia da numeração systematica, um numero qualquer tornou-se equivalente a uma somma de potencias successivamente decrescentes da base numeral, sendo cada uma dellas multiplicada por um algarismo inferior á mesma base.

Emfim, como complemento essencial da numeração abstracta, instituimos a theoria numerica da ordem, tendo por fim enumerar todas as disposições possiveis com um certo numero de objectos, já considerados em seu conjuncto, já encarados parcialmente.

Este triplice problema das permutações, arranjos e combinações, bem como o que se apresenta para as repartições, exigindo a classificação regular das referidas disposições, constitue como vimos uma questão analoga á construcção da escala numerica, salvo a difficuldade maior de evitar toda omissão e repetição.

Esta theoria nos mostra a insufficiencia da ordem abstracta para determinar a existencia pratica, quando não é inspirada na ordem concreta. Quando apenas se trata de combinar elementos, a abstracção satisfaz plenamente, podendo-se mesmo dizer que só ella é efficaz. Mas, como ella póde combinal-os de um grande numero de modos, vimos que dahi resulta uma indeterminação invencivel.

Não é senão pela conveniencia reconhecida entre uma das combinações e o fim á attingir, isto é, tirando da ordem concreta motivos de exclusão para as outras, que se póde dissipar essa indeterminação.

Assim é, por exemplo, que a formação da escala encyclopedica das sete sciencias póde ser abstractamente obtida de tantas maneiras quantas são as permutações possiveis com sete objectos, isto é, 5040. Teriamos, pois, 5040 classificações, e cada uma destas poderia ser justificada por boas razões. Considerando-as em si mesmas, perder-se-hia o tempo em discussões indefinidas; porque cada uma é, a

certos respeitos, superior a todas as outras, e lhes é inferior sob outros pontos de vista.

Para reconhecer si a classificação historica adoptada por A. Comte deve ser finalmente a preferida, é mistér comparal-a com o conjuncto do seu systema. Desde então ver-se-ha que ella convém com exclusão de todas as outras, e, para aquelles que estão convencidos da superioridade da doutrina positiva, a classificação das sciencias não é assumpto de discussão. » (*)

* * *

A *theoria das avaliações* basea-se immediatamente na numeração systematica, sem a qual qualquer calculo se tornaria inexequivel desde que os numeros a combinar fossem um tanto consideraveis.

E' preciso, pois, reconhecer normalmente que a numeração contém, por sua vez, o germen de todos os elementos algebricos, e a base de todas as operações arithmeticas. Sempre subordinadas ás fórmulas numeraes, estas ultimas consistem em fazer assim entrar os casos mais complicados de cada avaliação nos que são mais simples, immediatamente submettidos ao modo espontaneo, que seria impraticavel para numeros quaesquer.

Depois de haver successivamente instituido desta maneira as tres partes essenciaes do calculo fetichico — addição, subtracção e multiplicação systematisou-se a divisão, onde começa o calculo theocratico.

Sua theoria constitue a transição necessaria entre o estudo dos numeros inteiros e dos numeros fraccionarios, sem os quaes o preambulo abstracto da Logica ficaria sempre isolado de seu dominio concreto.

(*) P. Laffitte.— Calcul Arithmétique.

Normalmente destinada a levar ás concepções numericas uma continuidade que lhes é naturalmente extranha, a consideração das *fracções* fornece um elemento indispensavel á constituição mathematica. Uma tal aptidão motiva os tres capitulos que neste volume succedem aos dois relativos ao calculo, a principio fetichico, depois theocratico, dos numeros inteiros.

Elles fazem successivamente apreciar as transformações proprias ao estado fraccionario, á avaliação geral das combinações correspondentes, e ás simplificações especiaes que dizem respeito ás fracções basicas.

Visto philosophicamente, o duplo dominio da arithmetica isolada que acaba de ser resumido, póde já fornecer preciosos modelos de logica abstracta, onde os signaes não suscitam nenhuma preoccupação viciosa. Ao seu estudo systematico liga-se a manifestação inicial de muitas noções ulteriormente destinadas a serem incorporadas ao conjuncto das concepções mathematicas, sobretudo quanto á idéa de *limite*, que assim se torna tão abstracta quanto concreta.

Mas, uma sufficiente instituição do calculo arithmetico, plenamente expurgado de doutrinas algebricas, deve normalmente abraçar a *extracção das raizes quadradas*. A esta deve seguir-se o dominio das *progressões*, estudando ahi o caso mais simples e mais usual que póde philosophicamente indicar a natureza e a extensão de um tal campo.

Este estudo conduz directamente a considerar o complemento espontaneo que se refere aos differentes numeros figurados, aos quaes são directamente ligadas as series das diversas potencias. (*)

Sem sahir do dominio puramente arithmetico, póde-se desde já sentir a insufficiencia dos nossos meios theoricos

(*) A. Comte.—Synthèse Subjective. Conclusion.

e a necessidade de regrar seu uso, de conformidade com o destino geral de nossas forças quaesquer.

Assim é que, depois de haver avaliado especialmente uma somma composta de partes iguaes, não se póde, de modo algum, simplificar a avaliação de um producto formado de factores iguaes; de sorte que um dos principaes elementos algebricos deixa de ter a operação arithmetica que lhe corresponde (Potenciação). Do mesmo modo, si bem que a progressão onde cada termo é a somma dos dois precedentes pareça constituida mais simplesmente do que nenhuma outra, sua sommação fica completamente inaccessivel na maioria dos casos.

« Immediatamente proprio a desenvolver a nossa humildade, o estudo philosophico da arithmetica póde tambem começar a systematisar a nossa submissão, fazendo já sentir a existencia da ordem universal. Esta acha-se ahi, com effeito, esboçada em duas especies de leis objectivas e subjectivas, cuja harmonia geral toda a avaliação faz espontaneamente sobresahir.

Mas, a principal reacção encyclopedica da Arithmetica consiste em fornecer a fonte necessaria da Algebra, pela qual o calculo se liga, a principio, á Geometria, depois á Mecanica e desde então ao conjuncto da Philosophia Segunda.

A' medida que as questões de numeros se complicam, a avaliação final cessa de absolver a attenção, que se concentra cada vez mais sobre a elaboração preliminar das relações.»

Tornando-se gradualmente preponderante, este estudo institue o Calculo Algebrico, cujo destino proprio fica puramente logico, conforme veremos. Elle não contèm noções verdadeiramente scientificas senão em virtude de transformações numericas que ahi se acham incidentemente tratadas.

Estudado convenientemente, este dominio inicial da mathematica exercerá uma benefica reacção em todo decurso

da educação theorica. Bem dirigido, este estudo nos fornece, além de noções directamente praticaveis, manifestações decisivas não só de sua efficacia mental, mas até de sua influencia moral.

Vê-se ahi que a Logica, immediatamente investida de seu principal papel pela Philosophia Primeira, institue neste caso simples um typo de clareza, de precisão e de consistencia, já propria a guiar os esforços racionaes nos casos mais complicados.

« A importancia pratica e a reacção theorica deste dominio fazem directamente sentir a dignidade normal das especulações positivas, mesmo quando limitadas aos phenomenos mais grosseiros. Tambem caracterisa sua aptidão moral, fazendo já sobresahir a existencia especial de leis immutaveis, que sómente podem pôr um termo ás nossas divagações quaesquer. Ao mesmo tempo objectivas e subjectivas, estas leis começam aqui a disciplinar á nossa intelligencia, o mais perturbador dos tres elementos da natureza humana, systematisando sua digna submissão á ordem exterior, da qual deve tornar-se um fiel resumo.» (*)

(*) A. Comte. — Synthèse Subjective. Chapitre I

APPENDICE

Numeração concreta usada no Brasil até a adopção do systema metrico decimal: Numeros complexos que exprimem as diversas medidas. Calculo dos numeros complexos. Conversão das antigas ás novas medidas. Systema inglez de pesos e medidas; taboas de conversão; moedas estrangeiras e cambio

I

Diversas especies de medidas

O antigo systema de pesos e medidas usado no Brazil data dos tempos coloniaes. Emancipado de Portugal, o Governo do Imperio conservou-o nos primeiros annos.

Como, porém, resultavam graves inconvenientes da discrepancia entre as diversas medidas empregadas em algumas das antigas provincias, o Governo Imperial resolveu obvial-os.

Para isso nomeou uma commissão composta dos Srs. Marechal Francisco Cardoso da Silva Torres, como presidente, Dr. Candido Baptista de Oliveira, distincto lente de mathematica, e Ignacio Ratton, negociante, os quaes foram encarregados de rever o systema de pesos e medidas adoptado em todo paiz, assim como de reorganisar o seu systema monetario.

Em 25 de Abril de 1834, a Commissão apresentou o resultado de seus trabalhos em um judicioso e notavel relatorio, sendo mandado admittir no Brazil, pela lei de 24 de Setembro de 1835, o systema por ella proposto.

Vinte e sete annos depois, foi mandado substituir pelo *systema metrico decimal*, de accôrdo com a lei n. 1157 de 26 de Julho de 1862, a qual concedia o prazo de dez annos para a sua definiiiva adopção.

No fim deste tempo, isto é, em 1872, foi publicado o decreto n. 5169 de 11 de Dezembro, approvando o regulamento que estabeleceu as condições a que devem satisfazer os pesos e medidas do systema metrico decimal, já adoptado pela lei de 26 de Julho do mesmo anno,

e consignando que na respectiva *afferição* sómente fossem admittidas as *tolerancias* alli indicadas.

Apezar de sua admiravel simplicidade, o novo systema não foi acceito sem provocar protestos e reclamações, porque, como era natural, ia contrariar usos antigos. Determinou mesmo graves perturbações da ordem publica ao norte do paiz, a revolução dos *Quebra-Kilos* na Parahyba, que se propagou aos sertões das provincias vizinhas em 1874.

Póde-se, pois, affirmar que só a partir desse anno foi empregado definitivamente o systema metrologico decimal. O antigo systema deixou, porém, raizes profundas no interior do paiz, de sorte que não é raro referir-se á elle as medidas de superficie, de peso, etc.

Essa circumstancia e a necessidade de rever muitas vezes documentos antigos, em que é citado, justificam a exposição que aqui azemos.

Do mesmo modo que hoje, as medidas usadas antigamente referiam-se aos *comprimentos, superficies, volumes ou capacidades, pesos, tempo, moeda*, etc. Mas não se derivam todas de uma unidade fundamental, nem obedecem á mesma lei quanto á formação dos multiplos e submultiplos de cada especie, como acontece no systema metrico decimal.

A' similhança do que se nota neste systema, as medidas dividiamse tambem em *ficticias* e *effectivas*: estas eram representadas por instrumentos de medição, as outras não existindo sinão nominalmente, como, por exemplo, as medidas de superficie.

Como succede actualmente, a fabricação dos instrumentos de pesos e medidas era regulada por lei, sob o ponto de vista do material empregado, da forma, do peso e da exactidão em geral. Os fabricantes, não podendo chegar a uma exactidão rigorosa, foi-lhes concedida uma certa latitude na execução, sob o nome de *tolerancia*.

Segundo a mesma lei, ainda em vigor nesta parte, as medidas devem ser verificadas ou *aferidas* antes de entregues ao commercio. Independentemente dessa verificação primitiva, taes instrumentos são revistos e reverificados annualmente, afim de haver certeza de que não foram alterados.

Medidas de comprimento. — Segundo a citada lei de 1835, a unidade fundamental do nosso antigo systema de pesos e medidas, *padrão* das unidades de comprimento, continuou a ser a *vara*. Referida ao meridiano terrestre, verificou a Commissão que dividindo este em 36363636 partes iguaes, qualquer uma destas re-

presenta a grandeza da *vara* (que tambem equivale a $1^m,109$ do comprimento do pendulo que bate segundos sexagesimaes de tempo no Rio de Janeiro, na latitude de 22º—54'—10"). (a).

A *vara* tem 5 palmos, o *palmo* 8 pollegadas, a *pollegada* 12 linhas e a *linha* 12 pontos.

São estes os submultiplos da vara, cujos multiplos são: a *braça* com 2 varas, a *milha* com 841 $\frac{3}{4}$ braças e a *legua maritima* ou *geographica* com 3 milhas.

A legua maritima é chamada de *20 ao grão* por corresponder a $\frac{1}{20}$ do comprimento de 1 grão.

Com effeito, o meridiano tendo, como vimos, 36363636 varas ou 18181818 braças, é evidente que dividindo este numero por 360º, obtem-se o valor de um grão, que é, pois, 50505,05 braças; dividindo emfim este numero por 20, acha-se 2525,25 braças para valor da legua geographica ou maritima.

Para a *legua terrestre*, a lei de 1835 ordenou que continuasse a vigorar a *legua de sesmaria*, isto é, aquella segundo a qual haviam sido concedidas as *sesmarias*, nos tempos coloniaes, e que contém 3000 braças. Esta legua divide-se ordinariamente em meios, terços, quartos de legua.

Contra a disposição da mesma lei, continuou-se a empregar as seguintes medidas: *toeza ingleza*, que contém 6 pés inglezes, e é igual a 8,3127 palmos craveiros; *toeza franceza*, que contém 6 pés de rei, e é equivalente a 9 $\frac{1}{11}$ palmos craveiros; *pé inglez*, igual a 1,476 palmo craveiro (30 centimetros); *pé francez*, igual a 1,476 palmo craveiro; *pé portuguez*, que tem 1,5468 palmo craveiro; *passo geometrico* contendo 5 pés inglezes ou 6,927 palmo craveiro.

(a) Os trabalhos da Commissão tiveram por base o resultado obtido pelos sabios francezes para valor do comprimento do meridiano terrestre, isto é 40000000 de metros.

E' sabido, porém, que *Arago*, *Biot*, *Bessel* e outros scientistas verificaram e corrigiram aquella medição, levando em conta o achatamento da Terra nos pólos, achando que a quarta parte deste meridiano tem 10000856 metros legaes, em vez dos 10000000 encontrados por *Delambre* e *Mechain*; e que o proprio *Borda*, por experiencias muito delicadas, concluiu que o verdadeiro metro equivale a $1^m,012$ do comprimento do pendulo syderal que bate segundos sexagesimaes de tempo, na latitude de 48º-50'-13" do Observatorio de Paris, em logar de $0^m,9938$ do mesmo comprimento que se havia achado para o metro legal.

Mas, como a differença encontrada fosse insignificante, e tornar-se-hia impossivel determinar rigorosamente o comprimento do quadrante terrestre, continuou-se a acceitar o primeiro resultado, que exprime de facto uma approximação sufficiente.

Não têm, por conseguinte, nenhum fundamento as criticas feitas á illustre Commissão Brasileira por alguns pretendidos homens de sciencia.

Na medição das fazendas e estofos, empregava-se como medida legal, não só a *vara*, mas tambem o *covado*, contendo este 3 palmos avantajados, isto é $3^{p},015$. Para o mesmo fim e contra a lei, empregava-se tambem a *jarda*, medida ingleza com 4,156 palmo commum ou craveiro.

Medidas de superficie.— De conformidade com as leis geometricas, as medidas de superficie eram *quadrados* construidos sobre as medidas de comprimento.

Assim, pois, para obtel-as basta formar a segunda potencia do numero que representa a medida de comprimento respectivo. Vê-se, portanto, que são ellas : a *legua quadrada* tendo 9 milhas quadradas; a *milha quadrada* com $708543 \frac{1}{16}$ braças quadradas ; a *braça quadrada* com 4 varas quadradas ; a *vara quadrada* com 25 palmos quadrados; o *palmo quadrado* com 64 pollegadas quadradas e a *pollegada quadrada* com 144 linhas quadradas.

Para as medidas de superficies agrarias, a unidade adoptada era a *geira*, isto é, o quadrado de 20 braças de lado, cuja extensão superficial é, pois, de 400 braças quadradas. Comtudo, além destas medidas, foram ainda empregadas contra a disposição de 1835 : a *sesmaria* que é um quadrado tendo 1500 braças de lado e o *alqueire*, chamando-se assim a área de terreno em que se póde plantar um alqueire de milho. Como esta área póde variar com a qualidade da terra, com o modo de plantar, com a natureza do grão, mais ou menos grosso, e bem assim com a falta de uniformidade das *quartas* de milho, resultou tornar-se o alqueire muito variavel.

Todavia, conforme o modo mais commum de plantar-se, convencionou-se admittir geralmente dois typos para o *alqueire agrario*: para um, o quadrado de 100 braças de lado, contendo, portanto, 10.000 braças quadradas ; para o outro, o rectangulo, cujos lados adjacentes têm respectivamente 50 e 100 braças, compondo-se por conseguinte de 5.000 braças quadradas. Este ultimo era adoptado nas provincias do Paraná, de S. Paulo e nos campos de Minas, e o primeiro em Minas, na parte da matta, quasi geralmente na provincia do Rio e em outras. (b).

Havia ainda um outro typo de alqueire, cuja área é a de um quadrado de 75 braças de lado.

(b) Dr. João de Sá e Albuquerque. — Divisão e demarcação das terras particulares. — S. Paulo, 1897.

Mas parece que resultou erradamente do segundo typo, por supporem pessoas não entendidas em Geometria, que contém a mesma área toda porção de terreno encerrado pelo perimetro de 300 braças, qualquer que seja a figura assim formada. Estes dois typos de alqueires têm, com effeito, o mesmo perimetro de 300 braças; mas um possue a área do 5000 braças quadradas, ao passo que o outro contém 75 vezes 75 ou 5625 braças quadradas, isto é, 625 mais do que o geralmente convencionado para o alqueire.

Emfim, para dissipar enganos similhantes, basta notar que dos polygonos planos é o quadrado o que com menor perimetro comprehende maior área; e que a partir delle, para limitar por um quadrilatero uma certa área, tanto maior é o perimetro quanto maior é a differença entre dois lados adjacentes da figura.

«Para tornar bem clara a influencia que tem a figura na variação entre áreas e respectivos perimetros, considere-se que o perimetro de 300 braças lineares em um quadrado de 75 braças de lado fecha a área de 5625 braças quadradas; em um rectangulo de 50 braças de largura e 100 de comprimento, a área de 5000 braças quadradas; no rectangulo de 30 braças de largura e 120 de comprimento, a área de 3600 braças quadradas, e finalmente no rectangulo de 1 braça de largura e 149 de comprimento, a área de 149 braças quadradas sómente: entretanto todas estas figuras têm o mesmo perimetro de 300 braças, e suas áreas variam de 5625 a 149 braças quadradas.»

O alqueire se dividia em meios e quartos ou quartas, sendo a quarta, isto é, a quarta parte do alqueire, dividida por sua vez em oitavas partes que em alguns logares eram chamadas *pratos*. Entretanto, nas tres provincias acima citadas, denominava-se geralmente prato a toda a área equivalente a $\frac{32}{100}$ da do alqueire.

Usava-se tambem a *sesmaria de uma legua quadrada*, composta de 900 alqueires dos maiores, ou 1800 dos menores; a *sesmaria de meia legua quadrada*, formada de 225 alqueires dos maiores ou de 450 dos menores, isto é, dos de 5000 braças quadradas.

Medidas de volume e de capacidade. — As medidas de volume eram cubos construidos sobre as medidas de comprimento. Para obtel-as basta, pois, formar a terceira potencia do numero que exprime a medida de comprimento respectivo.

Eis as mais usadas para os solidos: *braça cubica* igual a 8 varas cubicas, *vara cubica* igual a 125 palmos cubicos, *palmo cubico* igual a 512 pollegadas cubicas e *pollegada cubica* igual a 1728 linhas cubicas.

Estas medidas eram empregadas principalmente na cubação das obras de alvenaria, cantaria e excavações.

As medidas de capacidade serviam, com hoje, para seccos ou liquidos.

Nas medidas para *seccos* o padrão ou unidade principal era o *alqueire* que, segundo a Commissão, não é mais do que o cubo construido sobre o decimo da *vara*, multiplicado pelo coefficiente 27 $\frac{1}{4}$, o que equivale a 64 pollegadas cubicas multiplicadas por 27 $\frac{1}{4}$, isto é, 1744 pollegadas cubicas de capacidade.

O alqueire, unidade principal, dividia-se em 4 quartas e a *quarta* em 4 *selamins* e tinha como multiplos a *fanga* com 4 alqueires e o *moio* com 15 fangas ou 60 alqueires.

Para medir a capacidade dos liquidos empregava-se o *tonnel* contendo 2 pipas, a *pipa* 15 almudes, o *almude* 12 canadas, a *canada*, unidade principal, 4 quartilhos e o *quartilho* ou *garrafa* 2 *martellos* ou 4 meios martellos.

A unidade principal é aqui a *canada* ou *medida* que equivale ao dobro do cubo construido sobre o decimo da vara, o qual contém, por conseguinte, 128 pollegadas cubicas.

Medidas de peso. — Quanto ás medidas de peso, a lei prescrevia as seguintes: a *tonelada* com 13 $\frac{1}{2}$ quintaes, o *quintal* com 4 arrobas, a *arroba* com 32 libras, a *libra* com 2 marcos, o *marco*, unidade principal, com 8 onças, a *onça* com 8 oitavas e a *oitava* com 72 grãos.

Contra as disposições da mesma lei de 1835, continuou-se a empregar para os metaes, pedras preciosas e productos medicinaes, uma libra especial, contendo apenas 12 onças, sendo ainda a *onça* de 8 oitavas ou *drachmas*, a *oitava* formada de 3 escropulos, o *escropulo* de 6 quilates e o *quilate* de 4 grãos.

A unidade principal das medidas de peso era assim o *marco*, o qual, segundo a Commissão, corresponde ao peso de 11 $\frac{11}{32}$ pollegadas cubicas de agua commum (volume igual ao cubo de um decimo da vara, multiplicado por $\frac{1}{5,642}$) na temperatura de 28° centigrados, sob a pressão atmospherica de 31 $\frac{1}{10}$ pollegadas inglezas ao nivel do mar. (c).

(c) Já dissemos quaes as medidas do systema decimal que substituiram as do antigo systema. As novas medidas *effectivas*, isto é, que têm instrumentos para representał-as, são as seguintes: *De comprimento*—2 decametros, 1 decametro e $\frac{1}{2}$ decametro, 4 metros, 2 metros, 1 metro e $\frac{1}{2}$ metro,

Medidas monetarias. — A nossa moeda distingue-se em *moeda metallica* e em *moeda papel* ou *fiduciaria*. A primeira é dotada de um valor intrinseco e a segunda é apenas um signal representativo da moeda, baseado na confiança, significando, portanto, uma divida do Thesouro Nacional.

A unidade monetaria brasileira é o real, que não tem isoladamente representação effectiva. Possuindo um valor muito pequeno, não exige o emprego das fracções, mesmo tratando-se das menores transacções. Além de tal vantagem, permitte que o nosso systema monetario seja decimal, o que o torna de grande commodidade.

As moedas metallicas do Brazil são de ouro, prata, nickel e cobre ou bronze, contendo todas uma liga com outro metal, afim de dar-lhes maior dureza e durabilidade. A relação entre o peso do metal precioso contido na moeda e o seu peso total, chama-se *titulo*, *toque* ou *fino*.

As nossas moedas metallicas, como as de todas as nações, têm dois valores: o *real* ou *intrinseco*, proveniente da quantidade de metal que entra na sua cunhagem, e o *nominal*, ou *convencional* fixado por lei.

O decreto n. 625 de 28 de Julho de 1849, organisando o systema monetario do Brazil, determinou que fossem cunhadas duas especies de moedas de ouro, tomando por base a oitava de ouro de 22 quilates com 0,917 de metal puro e 0,083 de *liga* de cobre e prata para titulo ou toque: De 20.000 réis com o peso de 5 oitavas e de 10.000 réis com o

---

1 decimetro e $\frac{1}{2}$ decimetro; *de volume para lenha e madeira* — $\frac{1}{2}$ decasterio, 2 stereos e 1 stereo; *de capacidade* — 1 hectolitro e $\frac{1}{2}$ hectolitro, 2 decalitros, 1 decalitro e $\frac{1}{2}$ decalitro, 2 litros, 1 litro e $\frac{1}{2}$ litro, 2 decilitros, 1 decilitro e $\frac{1}{2}$ decilitro (medidas para seccos, que são de fórma cylindrica, de madeira ou metal, com a altura igual ao diametro) e 2 litros, 1 litro e $\frac{1}{2}$ litro, 2 decilitros, 1 decilitro e $\frac{1}{2}$ decilitro, 2 centilitros e 1 centilitro (medidas para liquidos, que tambem são de fórma cylindrica, de estanho ou de ferro batido, e têm de altura o dobro do diametro); *de peso*—50 kilogrammos, 20 kilogrammos, 10 kilogrammos, 5 kilogrammos, 2 kilogrammos e 1 kilogrammo, 5 hectogrammos, 2 hectogrammos, 1 hectogrammo e $\frac{1}{2}$ hectogrammo (pesos de ferro fundido), 1 kilogrammo, 500 grammos, 200 grammos, 100 grammos, 50 grammos, 20 grammos, 10 grammos, 5 grammos, 2 grammos e 1 grammo (pesos de cobre), 5 decigrammos, 2 decigrammos, 1 decigrammo, 5 centigrammos, 2 centigrammos, 1 centigrammo, 5 milligrammos, 2 milligrammos e 1 milligrammo (pesos de latão ou de platina, dos quaes se faz uso nas officinas dos ourives, nos laboratorios chimicos, pharmaceuticos, etc.).

peso de 2 $\frac{1}{2}$ oitavas. A tolerancia de peso nestas moedas foi fixada em um grão nas primeiras e em meio grão nas segundas.

Posteriormente, em 1854, baixou uma lei mandando cunhar a moeda de 5000 réis de ouro com 1,25 oitava de peso, sendo em 1860 desmonetisada.

Por aquella lei foram ainda mandadas cunhar as seguintes moedas de prata com o titulo de 0,917: De 2000 réis com peso de 7 $\frac{1}{9}$ oitavas; de 1000 réis com o peso de 3 $\frac{3}{9}$ oitavas; de 500 réis com o peso de 1 $\frac{7}{9}$ oitava, e de 200 réis com o peso de $\frac{32}{45}$ da oitava; determinando-se que a tolerancia de peso fosse de 2 grãos nas de 2000 réis e nas outras, em proporção.

Em 1867, o decreto de 30 de Setembro mandou cunhar ainda as seguintes moedas subsidiarias de prata: De 2000 réis, valor nominal, titulo—0,900, peso—25 grammos, módulo— 37millimetros e tolerancia no peso, para mais ou para menos—0,1 grammo; de 1000 réis, valor nominal, titulo—0,900, peso—12,5 grammos, módulo—30 millimetros e tolerancia no peso, para mais ou para menos—0,05 grammos; de 500 réis, valor nominal, titulo—0,835, peso—6,25 grammos, módulo—25 millimetros e tolerancia no peso, para mais ou para menos—0,025 grammos; de 200 réis, valor nominal, titulo—0,835, peso—2,5 grammos módulo—19 millimetros e tolerancia no peso, para mais ou para menos —1 grammo para 229,5 grammos. (d).

O titulo, toque ou gráo de fino do ouro exprime-se geralmente pela denominação de *quilates* e o da prata pelo de *dinheiros*. Assim se diz que o ouro das nossas moedas é de 22 quilates e a prata de 11 dinheiros.

Ainda que estas duas denominações sejam differentes, representam, entretanto, a mesma relação numerica, pois $\frac{22}{24}$ do peso total é

(d) As moedas do mesmo metal e do mesmo valor têm todas rigorosamente o mesmo módulo, fixado em numero inteiro de millimetros, e assim podem offerecer medidas usuaes de comprimento.

Assim, por exemplo, 44 moedas de prata de 500 réis, collocadas umas em seguida ás outras, formam o comprimento da vara; e, portanto, 40, dispostas do mesmo modo, formam o comprimento do metro, similhantemente ao que se verifica no systema monetario francez, em que 19 moedas de prata de 5 francos e 11 de 2 formam, do mesmo modo, o comprimento do metro.

O mesmo acontece em relação ao peso, de sorte que podem servir de medida nas pesadas ordinarias.

Por exemplo, 40 das nossas moedas de prata de 2000 réis pesam exactamente 1000 grammos, e 32 moedas de bronze de 40 réis, 1 de 20 réis e 1 de 10 réis pesam uma libra menos um grammo.

igual a 0,917 para o ouro de 22 quilates, e $\frac{11}{12}$ do peso total tambem é igual a 0,917 para a prata de 11 dinheiros.

O ouro de lei ou o mais fino é, pois, de 24 quilates e a prata mais fina é a de 12 dinheiros.

Quando o ouro e a prata estão puros ou sem liga, diz-se que elles são de — *marco* —. Porque para o titulo do ouro emprega-se o marco, que se divide em 24 quilates, o *quilate* em 4 grãos e cada *grão* em 8 oitavas. Na prata o *marco* contém 12 dinheiros, cada *dinheiro* 24 grãos e cada *grão* 4 quartos ou 8 oitavas.

O quilate varia tão pouco de um paiz a outro, que póde ser considerado — universal — e corresponde a 3,876 grãos do nosso antigo peso.

O quilate define-se como sendo o peso do ouro puro equivalente ao peso da vigesima quarta parte de uma barra qualquer. Assim, suppondo o peso da barra dividido em 24 partes iguaes, si 18 dessas partes forem de ouro puro e 6 de outro metal inferior, diz-se que o ouro é de 18 quilates. Similhantemente, o dinheiro é o peso da prata pura equivalente ao peso da duodecima parte de uma barra qualquer.

Do que fica dito conclue-se que o ouro de 24 quilates e a prata de 12 dinheiros não contêm liga.

O decreto n. 4019 de 20 de Novembro de 1867 determinou que as moedas de cobre, então em circulação, fossem substituidas por outras moedas subsidiarias de bronze, compostas de uma liga ternaria de 95 partes de cobre, 4 de estanho e 1 de zinco, com os seguintes valores: De 20 réis com o peso de 7 grammos, o módulo de 25 millimetros e a tolerancia em peso de 0,02 grammo; de 10 réis com o peso de 3,5 grammos, módulo de 20 millimetros e a telerancia em peso de 0,02 grammo.

Na composição da liga a tolerancia é de 0,01 para o cobre e 0,005 para cada um dos outros dois metaes. Existe tambem a moeda de bronze de 40 réis, com o peso de 12 grammos, o módulo de 30 millimmetros, sendo a tolerancia em peso de 0,02 grammo.

O Governo do Imperio mandou cunhar moedas de nickel de 200 réis, 100 réis e 50 réis. Posteriormente foram cunhadas moedas de 400 réis do mesmo metal, sendo tanto estas como aquellas recunhadas pelo Governo Republicano, conforme se vê na tabella seguinte:

Moedas do Brazil

Valor	Peso em grammas	Metal puro	Titulo	Módulo	Tolerancia no peso	Tolerancia no titulo	Observação
OURO							
20$000. .	17,929	16,441	917	0,030	0,05	0,002	Lei de 1847
10$000. .	8,964	8,220	917	0,0225	0,025	0,025	
PRATA							
2$000 . .	20	18	900	0,033	0,1	0,002	Lei do 1905
1$000 . .	10	9	900	0,026	0,05	0,002	
$500 . .	5	4,5	900	0,022	0,025	0,002	
NICKEL							
$400 . .	12	3	25 partes de nickel e 75 de cobre	0,030	2 %	0,01	Leis de 1898 e 1900
$200 . .	8	2		0,025	2 %	0,01	
$100 . .	5	1,25		0,021	2 %	0,01	
BRONZE							
$040 . .	12	11,40	95 partes de cobre 4 partes de estanho 1 parte de zinco	0,030	0,02	0,01	Lei de 1873
$020 . .	7	6,65		0,025	0,02	0,01	Lei do 1867
$010 . .	3,5	3,325		0,020	0,02	0,01	

O nosso systema monetario é monometalista, ouro, valendo uma oitava deste metal (3,5853 grammos) de 22 quilates, 4000 réis ao par. A não ser as moedas de ouro, todas as outras são subsidiarias ou auxiliares. O recebimento das de prata só é obrigatorio até 20000 réis, o das de nickel, até 2000 réis e o das de bronze até 200 réis.

Medida de tempo. — O tempo é regulado pelo movimento da Terra em torno de si mesma e em volta do Sol. Dahi as duas principaes unidades de tempo, a saber o *dia* e o *anno*.

O dia solar médio ou simplesmente o dia é o tempo que a Terra gasta para executar o movimento de rotação em torno de seu eixo, isto é, sobre si mesma.

Independentemente desse movimento *diurno*, a Terra tem um outro movimento, a revolução *annual* que ella executa em torno do Sol em 365 dias approximadamente — cerca de 365 dias $\frac{1}{4}$ — ou melhor 365 dias, 5 horas, 48 minutos, 51 segundos e 6 decimos de segundos.

Dahi a segunda unidade de tempo, isto é, o anno médio ou simplesmente o anno.

Sabemos que o anno é dividido em 12 mezes, dos quaes 4 têm 30 dias, 7—31 e 1—28 ordinariamente, ou 29, quando bissexto.

O conjuncto desses dias attinge a 365. Mas, como nesta distribuição não se leva em conta a fracção 5 horas, 48 minutos, 51 segundos e 6 decimos, acontece que tal differença produz, no fim de 4 annos, 4 vezes 5^h—48'—51",6 ou 23^h—46'—24", o que perfaz cerca de um dia.

Eis por que a todos os 4 annos addiciona-se um dia de mais intercalado no mez de Fevereiro, que tem então 29 dias. (e).

Os annos assim accrescidos são chamados bissextos.

Conhece-se que o anno é bissexto verificando si os seus dois ultimos algarismos são exactamente divisiveis por 4: assim, 1912 será bissexto, porque 12 divididos por 4 dá um quociente exacto.

E' facil, porém, de vêr que dos annos seculares só podem ser bissextos aquelles que se reproduzem de 4 em 4 seculos. Para mostral-o transformemos a principio o numero complexo 5^h—48'—51",6 em fracção decimal de um dia. Este tem 24 vezes 60' ou 1440' ou ainda 1440' vezes 60", isto é 86400", pela mesma razão 5^h—48'—51",6 conterão 20931",6.

(e) Foram os romanos que primeiro intercalaram este dia supplementar em cada quarto anno, repetindo o dia 26 de Fevereiro, que entre elles se chamava *sexto calendarum*, e o dia repetido *bis-sexto calendarum*. Daqui veio o nome de *bissexto*, já usado no Calendario Juliano.

Dividindo, pois, 20931",6 por 86400, ter-se-ha a fracção procurada do dia, isto é, 0,24226 para o valor de 5^h—48'—51",6. Por isso que em cada anno se despreza 0,24226 de um dia, no fim de 4 annos ter-se-ha desprezado 0,24226 vezes 4, isto é, 0^d,96904.

Mas, em cada 4 annos, em logar de 0,96904 do dia addiciona-se effectivamente 1 dia completo ; logo, se addiciona para mais a differença entre um dia e 0^d,96904, que é igual a 0,03096. De sorte que no fim de 100 annos ter-se-ha para mais 0,03096 vezes $\frac{100}{4}$, igual a 0,03096 vezes 25, isto é, 0^d,744.

Eis por que em logar de ajuntar 1 dia no centesimo anno de cada seculo, deve-se, ao contrario, subtrahil-o, não tornando bissexto este anno secular.

Mas, subtrahindo 1 dia em logar de 0,744 do dia, subtrahe-se para mais a differença entre 1^d e 0,744 igual a 0,226 do dia que, entretanto, faz falta na contagem do tempo. Este erro depois de 400 annos será de 0,226 vezes 4, igual a 0^d,904. Para corrigil-o *basta, pois, tornar bissexto o anno secular de cada 4 seculos*; e tal erro não é então mais do que a differença entre 1^d e 0,904, isto é, 0,096 do dia, que apenas dará um dia de erro em 4200 annos, o qual, entretanto, não poderá ser desprezado sem perturbar a ordem do calendario.

Assim, pois, quando os dois primeiros algarismos de um seculo são zeros e formam com os seguintes um numero divisivel por 400, o anno secular é bissexto.

O *Calendario* que regula o tempo por este modo chama-se *Gregoriano*, porque resultou de uma reforma operada em 1582 pelo papa Gregorio XIII, que então modificou o Calendario Juliano (de Julio Cesar).

O tempo e as idades contam-se em todos os paizes a partir de uma época que assignala algum acontecimento memoravel na historia das nações ; esta época chama-se *Éra*.

Em todas as nações christãs, os annos contam-se da data do nascimento de Jesus Christo: é a Éra Christã.

Os musulmanos contam a sua *éra* ou *hegira* do dia 16 de Julho de 622 depois de Christo.

Para os turcos e arabes o anno nada tem de commum com o curso do Sol e das estações : compõe-se de 12 mezes lunares, ou de 12 lunações de 29 $\frac{1}{2}$ dias, isto é, de 354 dias solares. Com o fim de evitar as fracções do dia, consideraram os mezes de 30 e 29 dias alternadamente. Comprehende-se que esta maneira de contar

necessitava um correctivo, porque a lunação não é de 29 $\frac{1}{2}$ dias, mas de $29^{d},53059$; e esta differença para mais dava 11 dias em 30 annos.

De modo que os mahometanos foram obrigados a introduzir no seu calendario a intercalação desses 11 dias, e para isso attribuiram ao seu ultimo mez de 29 dias a duração de 30 dias 11 vezes, durante o periodo de 30 annos, o qual fórma o *cyclo musulmano.*

Em França, durante 14 annos, vigorou a *éra* republicana (calendario republicano), que começou a 22 de Setembro de 1792, dia da fundação da republica, e foi abolida a 22 de Setembro de 1806, sendo então restaurado o calendario *Gregoriano*. (f).

Neste ultimo calendario o anno começa sempre immediatamente depois de meia noite de 31 de Dezembro e termina no dia 31 de Dezembro seguinte á meia noite. (g). Quando um anno começa por um domingo, por exemplo, o anno seguinte começa sempre por uma segunda-feira ou por uma terça, si aquelle é bissexto. E' um dos inconvenientes do calendario Gregoriano essa falta de fixidez ou antes de coincidencia entre os dias e as datas, lacuna que desapparece no *calendario positivista*.

(f) Segundo o calendario republicano, o anno começava no equinocio do outono, a 22 de Setembro, á meia-noite, e os mezes tomaram denominações que caracterisavam certos phenomenos que se reproduziam nas quatro estações.

Assim, os mezes do outono eram denominados: Vendimaire, de 22 de Setembro a 19 de Outubro; Brumaire, de 22 de Outubro a 20 de Novembro; Frimaire, de 21 de Novembro a 20 de Dezembro. Os do inverno eram: Nivose, de 21 de Dezembro a 19 de Janeiro; Pluviose, de 20 de Janeiro a 18 de Fevereiro e Ventose de 19 de Fevereiro a 20 de Março. Os da primavera eram: Germinal, de 21 de Março a 19 de Abril; Floreal, de 20 de Abril a 19 de Maio e Praireal, de 20 de Maio a 18 de Junho. Os do verão eram: Messidor, de 19 de Junho a 18 de Julho; Thermidor, de 19 de Julho a 17 de Agosto e Fructidor, de 18 de Agosto a 19 de Setembro.

A 17 de Setembro começavam os dias complementares aos 12 mezes do anno, os quaes se estendiam até 21 nos annos communs e a 22 nos bissextos; de sorte que de 16 de Setembro ou 30 de Fructidor em diante se começava a contar os dias do seguinte modo: 1º dia complementar, 2º dia complementar, etc., até a data em que devia ter logar a passagem do Sol pelo equinocio do outono, data em que para a França devia começar o anno.

O mez dividia-se em 3 décadas e os nomes dos dias de cada década eram os seguintes: Primidi, Duodi, Tridi, etc., até Decadi. Os nomes dos santos dos dias do anno que se observam nos calendarios ordinarios foram substituidos por nomes de plantas, productos agricolas, animaes e objectos uteis. (Systema metrologico brazileiro pelo Capitão do Estado-Maior Rabello de Vasconcellos, donde extrahimos muitos dados para a primeira parte deste Appendice).

(g) Antigamente, o anno começava em Março, em vez de Janeiro, e por isso os mezes de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro eram o setimo, o oitavo, o nono e o decimo mez do anno, como o mostra a sua etymologia latina, 7—Septum, 8—Octo, 9—Novem e 10—Decem. (Calendario do Romulo).

Suppondo-se o anno dividido em duas partes, cada uma chama-se *semestre* (6 mezes) e cada semestre divide-se em dois *trimestres* (3 mezes).

Um periodo de 15 annos chama-se uma *indicção*; de 19 um *cyclo lunar*, periodo depois do qual as phases da lua se reproduzem na mesma data; de 28 annos, um cyclo solar, periodo depois do qual os dias da semana se reproduzem nas mesmas datas, porque contêm 7 annos bissextos e portanto um numero inteiro de semanas.

O producto dos tres numeros citados, 19, 28 e 15, isto é, 7980 é o que se chama o *cyclo de Scaliger* ou *periodo Juliano*, que se começa a contar do anno 4713 antes de J.C. Aquelles numeros 19, 28, 15, sendo primos entre si não serão encontrados em dois annos no periodo de 798, que contêm os mesmos numeros para esses tres cyclos; de sorte que o conhecimento do numero de ouro (19), do cyclo solar (28) e da indicção romana(15)para um anno de que se tenham perdido as outras indicações, fará achar a data desse anno. A origem do periodo Juliano, fixada em 4173 antes de Christo, é o anno que viu começar ao mesmo tempo os cyclos, designados como factores desse periodo.

Um periodo de 4 annos formava uma *olympiade* entre os gregos; de 5 annos um *lustro* entre os romanos.

O prazo de 10 annos chama-se decennio, o de 4, quatriennio, o de 3, triennio e o de 2, biennio.

As mudanças conhecidas sob a denominação de reforma gregoriana foram admittidas por todas as nações christãs, excepto a Russia, que ainda segue o calendario juliano; notando-se por isso na sua chronologia uma differença de 12 dias para menos em relação ás outras nações. Com effeito, em 1582, havia 10 dias de differença entre a data de um mesmo dia, expressa no calendario gregoriano e a expressa no juliano; e sendo os annos 1700 e 1800 considerados como bissextos neste ultimo calendario,o que não tem logar no gregoriano, é claro que tem este actualmente 12 dias de mais do que aquelle. (h).

II

Calculo dos numeros complexos

Conhecidas as relações entre os multiplos e submultiplos da unidade principal de cada especie de medidas, torna-se facil calcular

(h) Limitamo-nos ás noções que ahi ficam, mesmo porque a *Theoria do Calendario* pertence ao dominio da Astronomia. Vamos agora estudar os *numeros complexos* para obedecer ao programma official.

sobre os numeros complexos que representam estas. Segundo o espirito das soluções mathematicas, o calculo dos numeros complexos reduz-se a outro mais simples e já conhecido, isto é, ao calculo dos numeros incomplexos.

Para isso, a marcha seguida consiste em fazer recahir a questão ou no calculo dos numeros inteiros, ou no dos numeros fraccionarios. A transformação no calculo dos numeros inteiros exige apenas que se saiba *converter, umas nas outras, as diversas subdivisões das medidas da mesma especie*; mas no calculo dos numeros fraccionarios, ella requer ainda em cada numero complexo que o conjuncto das unidades de infima especie seja expresso por uma fracção da unidade principal. Naquella transformação, os resultados fornecidos pelas combinações numericas já ficam traduzidos por numeros complexos, ao passo que nesta é mister converter em taes numeros as fracções obtidas.

Nestas condições, vê-se que o calculo dos numeros complexos exige preliminarmente a solução dos dois problemas seguintes:

1.° Transformar um numero complexo em uma expressão fraccionaria da unidade principal.

2.° Transformar uma expressão fraccionaria concreta em um numero complexo equivalente.

Solução do primeiro problema.—Seja o numero 5 braças 1 vara 4 palmos 3 pollegadas e 8 linhas que se trata de converter em uma fracção da braça.

Uma braça é igual a 2 varas, por conseguinte 5 braças são iguaes a 5 vezes 2 ou 10 varas; ajuntando-se a estas 1 vara, que tem o numero dado, teremos 11 varas.

Uma vara é igual a 5 palmos, 11 varas são iguaes a 11 vezes 5 ou 55 palmos, que addicionados aos 4 palmos, que existem no numero, fazem 59 palmos.

Um palmo é igual a 8 pollegadas, 59 palmos são iguaes a 8 vezes 59 ou 472 pollegadas; ajuntando a estas as 3 que ha no numero, teremos 475 pollegadas.

Uma pollegada contém 12 linhas: 475 pollegadas conterão 475 vezes 12 ou 5700 linhas que, com as 8 do numero dado, fazem 5708 linhas.

Assim $5^{br} - 1^{v} - 4^{P} - 3^{p} - 8^{l}$ igualam a 5708^{l}. Como porém 1^{br} equivale a 2^{v} ou a 10^{P}, que valem 80^{p}, e estas 960^{l}, conclue-se que 1^{l} é igual a $\frac{1}{960}$ da braça e, portanto, 5708^{l} serão iguaes a $\frac{5708}{960}$ da braça.

Eis o typo do calculo :

$$5^{br}—1^{v}—4^{P}—3^{p}—8^{l}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 10 \\ 1 \\ \hline 11 \\ 5 \\ \hline 55 \\ 4 \\ \hline 59 \\ 8 \\ \hline 472 \\ 3 \\ \hline 475 \\ 12 \\ \hline 950 \\ 475 \\ \hline 5700 \\ 8 \\ \hline 5708 \end{array}$$

Logo, *para transformar um numero complexo em uma expressão fraccionaria da unidade principal, toma-se para numerador o numero dado convertido em unidades da ultima subdivisão, e para denominador a unidade principal, tambem convertida em medidas da mesma subdivisão.*

Solução do segundo problema.—Seja o numero fraccionario $\frac{7508^{br}}{960}$ que se trata de transformar no numero complexo equivalente.

O numero dado representa o quociente de 5708^{br} por 960 : effectuando a divisão obtém-se para quociente 5^{br} com um resto de 908^{br}.

Ora, uma braça sendo igual a 2 varas, 908^{br} serão iguaes a 908 vezes 2^{v} ou 1816^{v}. Dividindo este numero pelo divisor 960, acha-se para quociente 1^{v} com um resto de 856^{v}.

Uma vara tendo 5^{P}, 856^{v} terão 856 vezes 5 ou 4280^{P}. Dividindo este numero pelo mesmo divisor, obtém-se para quociente 4^{P} com [um resto de 440^{P}.

Um palmo contendo 8^{p}, 440^{P} conterão 440 vezes 8 ou 3520^{p}. Dividindo este numero por 960 chega-se ao quociente 3^{p}, com um resto de 640^{p}.

Uma pollegada tendo 12^{l}, 640^{p} conterão 640^{p} vezes 12 ou 7680^{l}. Dividindo, emfim, este ultimo numero pelo mesmo divisor, obtém-se o quociente 8^{l}, sem nenhum resto.

O quociente total é, pois, $5^{br} - 1^{v} - 4^{P} - 3^{p} - 8^{l}$, que representa o numero complexo procurado.

Eis o typo do calculo :

```
5708 | 960
0908   5br — 1v — 4P — 3p — 8l
  2v
1816
0856
  5P
4280
0440
  8p
3520
0640
 12l
1280
 640
7680
0000
```

Logo, *para transformar uma expressão fraccionaria concreta em numero complexo, divide-se o numerador pelo denominador e o quociente exprime unidades da primeira especie. Converte-se o resto em unidades da segunda especie, divide-se o resultado pelo mesmo denominador, e o quociente representa unidades desta segunda especie. Continúa-se do mesmo modo, até haver considerado a ultima subdivisão da unidade principal.*

Sendo esta transformação um tanto longa, o calculo dos numeros complexos torna-se laborioso, e por isso prefere-se de ordinario o outro processo que passamos a expor.

Addição.—Seja proposto addicionar os seguintes numeros complexos : 11 quintaes—5 arrobas—28 libras, 8 quintaes—8 arrobas—25 libras e 20 quintaes—19 arrobas—12 libras.

A somma das libras é 65 ; como, porém, a arroba tem 32 libras, aquelle numero conterá tantas arrobas quantas vezes contiver 32. Dividindo, pois, 65 por 32, vê-se que 65^{lb} contém $2^{@}$ e 1^{lb} : escrevemos 1^{lb} e reservamos as $2^{@}$ para juntal-as á somma das arrobas. Esta somma assim accrescida torna-se 34 ; como, porém, o quintal tem $4^{@}$, as 34 obtidas conterão 8^{Q} e $2^{@}$. Escrevemos $2^{@}$ e reservamos os 8^{Q} para addicional-os á somma dos quintaes. Tal somma, assim augmentada, nos fornece 47^{Q}, que escrevemos. A somma procurada é, pois, igual a $47^{Q} - 2^{@} - 1^{lb}$.

Eis o typo do calculo :

11^Q	$5^@$	28^{lb}
8^Q	$8^@$	25^{lb}
20^Q	$19^@$	12^{lb}
47^Q	$2^@$	1^{lb}

Póde-se tirar a prova da operação invertendo a ordem das parcellas e praticando-a novamente ; ou então fazendo o calculo da esquerda pára a direita, conforme indicamos para os numeros inteiros. Neste caso, porém, é mister que o resto obtido em cada columna seja convertido em unidades da seguinte, para então ser addicionado á somma respectiva ; proseguindo deste modo, a ultima differença deve ser zero.

Subtracção.—Seja proposto subtrahir 3 horas 52 minutos e 7 segundos de 5 horas 31 minutos e 25 segundos.

Tirando 7^s de 25^s, obtemos 18^s de resto. Não podendo subtrahir 52^m de 31^m, addicionamos a este numero 60^m, em troca de 1^h que deduzimos das 5^h : obtemos 91^m. Tirando destes os 52^m, temos o resto 39^m. Emfim, subtrahindo as 3^h das 4^h restantes, obtemos 1^h de resto. O resto total é, pois, igual a 1^h—39^m—18^s.

Eis o typo do calculo :

	4	60	
	5^h	31^m	25^s
	3^h	52^m	7^s
	1^h	39^m	18^s
Prova . . .	5	31	25

Sommando o minuidor com o resto obtemos o minuendo, o que prova estar certa a operação.

Multiplicação.—Resulta da definição geral da multiplicação que o producto é necessariamente da especie do multiplicando, e que o multiplicador deve ser considerado como abstracto e indicando o numero de vezes que se deve repetir o multiplicando, ou a parte que delle se deve tomar.

Nesta operação distinguem-se dois casos : o 1° é aquelle em que sómente um dos factores é numero complexo ; no 2°, ambos os factores são numeros complexos. Mas no 1° caso, deve-se ainda fazer

uma distincção, attendendo-se que o multiplicando póde ser o numero complexo, ou o incomplexo, conforme o enunciado da questão.

Vamos apresentar tres problemas nos quaes se tem : no 1° só o multiplicando complexo, no 2° só o multiplicador complexo e no 3° ambos os factores complexos.

1° Problema.—*Custando 1 libra de certa mercadoria 15 libras sterling 4 shillings e 5 pence, qual será o preço de 8 libras?*

Será evidentemente 8 vezes $15^{£}$ mais 8 vezes 4^{sh} mais 8 vezes 5 pence.

(N. B.— Uma *libra sterling* vale 20 *shillings* e 1 *shilling* 12 *pence*).

$$\begin{array}{rrr} 15^{£} & 4^{sh} & 5^{pence} \\ & & 8 \\ \hline 121^{£} & 15^{sh} & 4^{pence} \end{array}$$

O producto de 5 *pence* por 8 é 40 *pence*, ou 3 *shillings* e 4 *pence*; escreve-se 4 *pence* e reserva-se 3 *shillings* para ajuntar ao producto seguinte. O producto de 4 *shillings* por 8 é 32 *shillings* que, com os 3 reservados do producto precedente, fazem 35 *shillings*.

Ora, 35 *shillings* contém 1 *libra* e 15 *shillings* : escrevem-se estes e ajunta-se a *libra* ao producto seguinte; o producto de 15 *libras* por 8 é 120 *libras*, que com a reserva fazem 121 *libras*.

Este processo torna-se longo no caso de ser o multiplicador um numero complexo. Por isto a multiplicação de numeros complexos effectua-se o mais das vezes por um methodo denominado das *partes aliquotas*. (Chama-se *parte aliquota* de um numero a que se contém exactamente nesse numero, e *parte aliquanta* a que não divide exactamente o dito numero).

O methodo das partes aliquotas consiste em deduzir cada producto parcial de um dos precedentes por meio das partes aliquotas deste.

No emprego deste methodo são ás vezes precisos, por facilidade, certos productos, que não correspondendo a parte alguma do multiplicando, não devem ser sommados; pelo que se assignalam com um traço, para evitar enganos. E como elles unicamente servem de auxilio á formação de outros productos, são por isso denominados *productos subsidiarios*.

Damos uma applicação do *methodo das partes aliquotas* no problema que se segue.

2° Problema.—Sendo 12000 réis o preço de um almude de certo liquido, qual será o preço de 5 almudes 10 canadas e 3 quartilhos?

		12000 réis
		5^{Al} 10^{can}. 3^{q}
5^{Al}		60000 réis
10^{can}	6	6000
	3	3000
	1	1000
3^{q}	2	500
	1	250
		70750 réis

A operação consiste em determinar successivamente o preço de 5 almudes, o de 10 canadas e o de 3 quartilhos, e sommar os resultados.

Ora, sendo 12000 réis o preço de 1^{Al}, o de 5^{Al} é 12000 réis vezes 5 ou 60000 réis.

Para determinar o preço de 10^{can}, determina-se successivamente :

1.° O preço de 6^{can} (6 é factor de 12 ou parte aliquota do almude);
2.° O preço de 3^{can} (3 é factor ou parte aliquota de 6) ;
3.° O preço de 1^{can}.

O preço de 6^{can} ou $\frac{1^{Al}}{2}$ é a metade do preço de 1^{Al} ou $\frac{12000}{2}$ igual a 6000 ; o preço de 3^{can} é a metade do preço de 6^{can} ou $\frac{6000}{2}$ igual a 3000, e o preço de 1^{can} é a terça parte do preço de 3^{can} ou $\frac{3000}{3}$ igual a 1000.

Para determinar o preço de 3^{q}, determina-se :

1.° O preço de 2^{q} (2 é factor de 4 ou parte aliquota da canada);
2.° O preço de 1^{q}.

Ora, 2^{q} são a metade de 1^{can}, logo o preço de 2^{q} é a metade do preço de 1^{can} ou $\frac{1000}{2}$, igual a 500 ; emfim o preço de 1^{q} é a metade do preço de 2^{q} ou $\frac{500}{2}$, igual a 250. (Rochet—Arithmetica.)

3° Problema. — Sendo 1 libra, 15 shillings e 9 pence o preço de uma jarda de fazenda, qual será o preço de 3 jardas, 2 pés e 9 pollegadas?

		£	sh	pence
		$1^{£}$	15^{sh}	9^{pence}
		3^{j}	$2^{pés}$	9^{p}
$1^{£}$ . . .		$3^{£}$		
15^{sh}. .	10	1	10^{sh}	
	5		15	
	(1)		(3)	
9^{pence} .	6		1	6^{pence}
	3			9
$2^{pés}$ . .	1		11	11
	1		11	11
9^{p} . .	6		5	11 ½
	3		2	11 ¾
		$7^{£}$	0^{sh}	$1/4^{penny}$

Temos de determinar: 1°, o preço de 3 jardas; 2°, o de 2 pés; 3°, o de 9 pollegadas. O preço de 3 jardas é 3 vezes o preço de uma, 3 vezes $1^{£}$ 15^{sh} 9^{pence}, multiplicação que se effectua como explicamos no 1° caso, ou tambem por meio das partes aliquotas:

1°, producto parcial — $1^{£}$ multiplicada por 3, igual a $3^{£}$;

2°, producto parcial — 15^{sh} multiplicados por 3. Obtém-se este producto determinando separadamente o producto de 10^{sh} e o de 5^{sh}.

O producto de 10^{sh} $\left(\frac{1^{£}}{2}\right)$ é a metade do producto de $1^{£}$; ora, $1^{£}$ multiplicada por 3 é igual a $3^{£}$, logo o producto de 10^{sh} é a metade de $3^{£}$ ou $1^{£}$ e 10^{sh}.

O producto de 5^{sh} é a metade do precedente ou 15^{sh}.

3°, producto parcial — 9^{pence} multiplicados por 3. Obtém-se este producto determinando o producto de 6^{pence} $\left(\frac{1^{sh}}{2}\right)$ e o de 3^{pence}.

O producto de 6^{pence} $\left(\frac{1^{sh}}{2}\right)$ é a metade do producto de 1^{sh}; ora, o producto de 1^{sh} é a quinta parte do de 5 ou $\frac{15}{5}$, que é igual a 3^{sh} (producto subsidiario); logo, o producto de 6^{pence} é a metade de 6^{sh} ou 1^{sh} e 6^{pence}.

O producto de 3^{pence} é a metade do precedente ou 9^{pence}.

Procuremos agora o preço de 2 pés. Não sendo 2 pés parte aliquota da jarda, cumpre determinar o producto de 1 pé e tomal-o 2 vezes.

Ora, 1 pé é a terça parte de 1 jarda ; logo, o producto de 1 pé é a terça parte do producto de 1 jarda, isto é, a terça parte do multiplicando ou 11 shillings e 11 pence.

Resta achar o preço de 9 pollegadas. Determina-se o preço de 6 pollegadas (porque 6 é divisor de 12 ou parte aliquota do pé), e o preço de 3 pollegadas.

O preço de 6^p $\left(\frac{1^{pé}}{2}\right)$ é a metade do preço de $1^{pé}$, ou 5^s e $11\frac{1}{2}^{pence}$. O preço de 3^p é a metade do precedente ou 2^{sh} e $11\frac{3}{4}^{pence}$.

A somma de todos estes productos parciaes é o producto total pedido $7^{£}$ $\frac{1}{4}^{penny}$ (Coqueiro — Arithmetica).

Este problema nos mostra que é sobretudo no caso de ambos os factores complexos, que mais convém applicar o methodo das partes aliquotas.

Como exercicio multipliquemos ainda 12 libras tornezas, 17 soldos e 9 dinheiros $\frac{1}{3}$ por 5 toezas, 4 pés e 7 pollegadas.

Eis um modo mais simples de dispôr o calculo:

	$12^{£}$	17^s	$9^d\frac{1}{3}$
	5^t	$4^{pés}$	7^p
	$60^{£}$	0^s	0^d
10^s	2	10	
5^s	1	5	
2^s	0	10	
(1^s)	(0)	(5)	
6^d	0	2	6
3^d	0	1	3
(1^d)	(0)	(0)	(5)
$\frac{1^d}{3}$	0	0	$1\frac{2}{3}$
$3^{pé}$	6	8	$10\frac{2}{3}$
$1^{pés}$	2	2	$11\frac{5}{9}$
6^p	1	1	$5\frac{7}{9}$
1^p	0	3	$6\frac{52}{54}$
	$74^{£}$	5^s	$9^d\frac{17}{27}$

(N. B.— A libra torneza (antiga moeda franceza) tinha 20 soldos e 1 soldo 12 dinheiros.)

Como no caso geral da multiplicação dos numeros inteiros, temos de multiplicar todo o multiplicando por cada classe de unidades do multiplicador. Todavia começamos a operação em sentido contrario, isto é, pelas mais altas unidades do multiplicador, porque no caso dos numeros inteiros, de um certo numero de unidades menores constituimos uma ou mais unidades maiores, e, neste caso, vamos em ordem natural tomando do multiplicador as diversas fracções da unidade principal e suas subdivisões existentes no multiplicando e vice-versa, o que só se póde fazer facilmente começando da esquerda para a direita.

Temos, pois, de multiplicar todo o multiplicando pela parte mais elevada do multiplicador, que é 5^t.

Como o producto é sempre de especie do multiplicando e o multiplicador se considera como um numero abstracto, é obvio que, no caso em questão, o producto é da especie libras tornezas, soldos e dinheiros. Para obtel-o, notemos que o multiplicador sendo 5, o producto deve ser 5 vezes o multiplicando; portanto, comecemos por multiplicar $12^{£}$ por 5, o que produz $60^{£}$.

Para formar-se o producto de 17^s por 5^t, observe-se que a libra tem 20^s, e conseguintemente 17^s é parte aliquanta da libra, mas que póde ser decomposta nas seguintes partes aliquotas, 10^s—5^s—2^s; e obtido o producto de cada uma destas partes por 5, a somma dos productos parciaes dará o do todo 17^s por 5. Ora, ter no multiplicando 10^s é o mesmo que ter $\frac{1}{2}^{£}$, porém, em virtude da definição, quando o multiplicando é $\frac{1}{2}$ o producto é metade do multiplicador; logo, obtém-se o producto de 10^s tomando a metade de 5, o que dá $2^{£}$ e sobra $1^{£}$, que vale 20^s, cuja metade é 10^s. Obtém-se o producto de 5^s ou tomando a quarta parte do multiplicador 5, porque com effeito 5^s é a quarta parte da libra e quando o multiplicando é $\frac{1}{4}$ o producto é a quarta parte do multiplicador, ou tomando a metade do producto de 10^s, visto como 5^s sendo a metade de 10^s, o seu producto deve ser a metade do producto deste; e então acha-se $1^{£}$ 5^s.

Similhantemente, obtém-se o producto de 2^s tomando a quinta parte do producto de 10^s, porque 2^s é a quinta parte de 10^s, e acha-se: $0^{£}$ 10^s.

Trata-se agora de formar o producto de 9^d; e como 9^d é parte aliquanta do soldo, decompõe-se nas partes aliquotas 6^d e 3^d. Ora, si nós tivessemos o producto de 1^s, tomando-lhe a metade obteriamos o producto de 6^d, porque sendo 1^s igual a 12^d, segue-se que 6^d é a metade de 1^s; mas, como não temos esse producto, podemos formal-o subsidiariamente, tomando a metade do producto de 2^s, e escrevendo-o em typo diverso ou traçando-o, para que não possa ser confundido com os outros productos, nem entrar na somma; ou então, querendo-se evitar o producto subsidiario, toma-se a quarta parte do producto de 2^s. E de qualquer dos dois modos acha-se para o producto de 6^d, $0^£ - 2^s - 6^d$. Evidentemente, 3^d é metade de 6^d e por conseguinte obtém-se esse producto tomando a metade do producto de 6^d, e vem: $0^£\ 1^s\ 3^d$.

De todo o multiplicando só resta formar o producto de $\frac{1^d}{3}$; e como não temos o producto de 1^d, fórma-se esse producto subsidiario tomando a terça parte do producto de 3^d e vem: $0^£ - 0^s - 5^d$.

Tomando a terça parte deste producto acha-se para o producto de $\frac{1^d}{3}$: $0^£ - 0^s - 1^d\ \frac{2}{3}$ e temos até aqui formado o producto de todo o multiplicando pela primeira parte do multiplicador, que é 5^t.

Vamos agora obter o producto de todo o multiplicando pela segunda parte do multiplicador, que é $4^{pés}$. A toeza tendo $6^{pés}$, vê-se que $4^{pés}$ não é sua parte aliquota. Mas podemos decompôr estes $4^{pés}$ nas partes aliquotas $3^{pés}$ e $1^{pé}$.

Formaremos primeiramente o producto de $3^{pés}$, attendendo que $3^{pés}$ é metade da toeza e que quando o multiplicador é $\frac{1}{2}$, o producto é metade do multiplicando. Tomando, pois, a metade deste, virá para o producto de $3^{pés}$: $6^£ - 8^s - 10^d\ \frac{2}{3}$. E a maneira como se obtém este producto é a seguinte: a metade de $12^£$ é $6^£$, a metade de 17^s é 8^s e sobra 1^s, que vale 12^d que se juntam aos 9^d existentes, e perfazem 21^d, cuja metade é 10^d e resta 1^d mais $\frac{1}{3}$ que é igual a $\frac{4^d}{3}$, e a metade de $\frac{4^d}{3}$ é $\frac{2^d}{3}$.

Obtido o producto de $3^{pés}$, facilmente se obtém o producto de $1^{pé}$ tomando a terça parte, e vem: $2^£ - 2^s - 11^d\ \frac{5}{9}$.

Só falta agora obter o producto pela terceira parte do multiplicador, que é 7^p. Para isso decompõe-se a parte aliquanta 7^p nas partes aliquotas 6^p e 1^p (por isso que o pé tem 12 pollegadas).

Obtém-se o producto de 6^p tomando a metade do producto de um pé, porque um pé é igual a 12^p, e vem: $1^£ - 1^s - 5^d\ \frac{7}{9}$, que se obtém do seguinte modo: a metade de $2^£$ é $1^£$, a me-

tade de 2^s é 1^s, a metade de 11^d é 5^d e sobra 1^d mais $\frac{5}{9}$, que é igual a $\frac{14}{9}$, cuja metade é $\frac{7}{9}$. Finalmente, obtém-se o producto de 1^p tomando a sexta parte do producto de 6^p, do seguinte modo: não sendo expresso em inteiros a sexta parte de $1^£$, convertemol-a em 20^s que reunidos a 1 existente na columna dos soldos, fazem 21^s, cuja sexta parte é 3^s, e sobram 3^s, que valem 36^d; estes, sendo reunidos aos 5 que existem na respectiva columna, fazem 41^d, cuja sexta parte é 6^d e sobram 5^d mais $\frac{7}{9}$ que são iguaes a $\frac{52}{9}$, cuja sexta parte é $\frac{52}{54}$ ou $\frac{26}{27}$.

Sommam-se agora os productos parciaes (tendo o cuidado de não incluir os subsidiarios) e tem-se o producto total, que é $74^£—5^s—8^d\frac{17}{27}$. (Ext. do Explicador de Arithmetica de E. de Sá).

Ainda a titulo de exercicio, vamos obter este producto transformando o multiplicando e o multiplicador respectivos em fracções da unidade principal, segundo o processo geral a que alludimos.

Transformando o primeiro factor $12^£—17^s—9^d\frac{1}{3}$, obtém-se $\frac{928^£}{72}$; procedendo do mesmo modo com o segundo factor $5^t—4^{pés}—7^p$, tem-se $\frac{415^t}{72}$; multiplicando as duas fracções, acha-se $\frac{385120^£}{5184}$ que, convertida em um numero complexo, fornece aquelle mesmo producto, isto é, $74^£—5^s—9^d\frac{17}{27}$.

Divisão.—Na divisão dos numeros complexos, qualquer que seja o problema a resolver, a questão reduz-se sempre, como no caso dos numeros incomplexos, a determinar um dos factores de um producto quando este e o outro factor forem conhecidos. Porém a especie deste ou daquelle termo influe directamente, não só na especie do quociente, como tambem no processo para obter esse mesmo quociente.

Porque o dividendo, sendo necessariamente da especie de um de seus factores, resulta :

1º, que si o dividendo, e o divisor forem de especie differente, o quociente será da especie do dividendo ;

2º, que si o dividendo e o divisor forem da mesma especie, o quociente representará na operação o papel de um numero abstracto, e si em consequencia do enunciado do problema elle tenha de ser concreto, sómente esse enunciado indicará a sua especie.

Nestas condições, devemos distinguir dois casos geraes na divisão dos numeros complexos :

1°, o dividendo e o divisor são de especie diversas ;

2°, o dividendo e o divisor são da mesma especie.

No 1° caso duas circumstancias podem occorrer : ou o divisor é incomplexo (abstracto ou concreto), ou o divisor é complexo.

1.° *Os termos da divisão são de especie differente e o divisor é incomplexo.*

Para bem comprehender este caso, *seja proposto determinar a centesima parte de um arco de meridiano que tenha 23°—48'—52''.*

Si a centesima parte do arco de que se trata fosse conhecida, é evidente que multiplicando-a por 100 obteriamos todo o arco. Por conseguinte o numero complexo 23°—48'—52'' não é mais do que um producto de dois factores, dos quaes se conhece um, que é 100, e procura-se o outro. Tudo reduz-se, portanto, a dividir aquelle numero por este ; e o quociente sendo aqui da mesma especie do dividendo, representará o comprimento pedido.

Ora, 23° não contém vez nenhuma o divisor 100 ; logo, no quociente procurado não haverá gráos ; mas 23°, convertidos em minutos, produzem 23° vezes 60' ou 1380', que addicionados aos 48' existentes, perfazem 1428'. Dividindo este numero por 100, teremos 14' para quociente e um resto de 28'. Transformando este resto em segundos, chegaremos a 28 vezes 60 ou 1680'', os quaes sendo ajuntados aos 52 do numero proposto, perfazem 1732''.

Dividindo emfim este ultimo numero pelo mesmo divisor, obtém-se para quociente 17'', havendo um resto de 32''.

O quociente procurado é, pois, 14' 17'' $\frac{32}{100}$ que é a centesima parte do arco em questão.

Eis o typo do calculo :

$$
\begin{array}{r|l}
23^\circ—48'—52'' & 100 \\ \cline{2-2}
\underline{60} & 14'—17'' \\
1380' & \\
\underline{48'} & \\
1428' & \\
28' & \\
\underline{60'} & \\
1680'' & \\
\underline{52''} & \\
1732'' & \\
32 &
\end{array}
$$

Si quizessemos exprimir em metros o comprimento do arco obtido, bastaria multiplical-o por 111111^{m}, que é o valor de um

grão. Porque o quarto do meridiano terrestre tendo, como vimos, 10000000 de metros, é evidente que dividindo este numero por 90°, virá o valor do 1°, que é aquelle acima indicado.

Como exercicio proponhamo-nos ainda resolver o problema seguinte: *Tendo 487 toesas de uma obra custado $3596^{£}—17^{s}—11^{d}$, qual será o preço da toesa ?*

Effectuando-se a divisão do numero complexo pelo incomplexo, conforme a marcha acima, obteremos $7^{£}—7^{s}—8^{d}\,\frac{291}{481}$.

2.° Os termos da divisão são de especie differente e o divisor é complexo.

Para comprehender-se este caso, seja proposto o problema seguinte: *Sendo $10^{£}—13^{sh}—7^{pence}$ o preço de $5^{j}—1^{pé}—6^{p}$ de certa obra, qual será o preço de 1 jarda ?*

Si este preço fosse conhecido, multiplicando-o por $5^{j}—1^{pé}—6^{p}$, reproduziriamos evidentemente $10^{£}—13^{sh}—7^{pence}$; por conseguinte o preço procurado é o quociente deste numero complexo por aquelle.

Mas, transformando o divisor em uma expressão fraccionaria da sua unidade principal, a questão recahirá no caso precedente. Porque para dividir o dividendo complexo pelo divisor fraccionario assim obtido, bastará multiplical-o pelo denominador deste ultimo (multiplicação de numero complexo ou incomplexo por numero incomplexo), e dividir o producto pelo respectivo numerador, como no caso precedente.

Transformação do divisor em numero fraccionario :

5^{j}	$1^{pè}$	6^{p}	
3			
$16^{pés}$			$\frac{198^{j}}{36}$
12			
32			
16			
198^{p}			

Multiplicação :

		$10^{£}$	13^{sh}	7^{pence}
		36		
$10^{£}$		$360^{£}$		
13^{sh}	10	18		
	2	3	12^{sh}	
	1	1	16	
7^{pence}	6	0	18	
	1	0	3	
		$384^{£}$	9^{sh}	

Divisão:

```
384£      9sh  | 198
186             1£ 18sh 10pence
 20
----
3720
   9
----
3729sh
1749
 165
  12
----
 330
 165
----
1980pence
   0
```

3.º Os termos da divisão são da mesma especie, ambos complexos, ou um complexo e o outro incomplexo.

Para esclarecer este caso, resolvamos o seguinte problema: *Custando 1000 réis 359 varas de sarrafo, por quanto compraremos 1 vara—2 palmos—7 pollegadas?*

Este ultimo numero sendo menor do que aquelle, torna-se claro que o quociente procurado será uma quantia inferior a 1000 réis, isto é uma fracção deste. Ora, si tal fracção fosse conhecida, é evidente que multiplicando-a por 359^v obteriamos $1^v—2^p—7^p$; por consequencia a questão reduz-se a dividir $1^v—2^p—7^p$ por 359.

O dividendo sendo reduzido a unidades de infima especie, dá 63^p, e o divisor 14360^p. Procedendo a divisão, vem:

```
6300 | 14360
 556   0,004
```

E a quantia procurada será 0,004 de 1000 réis que vem a ser 4 réis.

Vamos resolver ainda o seguinte problema: Uma fonte a correr gastou 1 hora — 58 minutos — 58 segundos para encher um almude; quantos almudes encherá em 19 horas—7 minutos — 31 segundos?

Si o numero de almudes incognito fosse conhecido, sendo multiplicado por $1^h—58'—51''$, que é o tempo correspondente a 1 almude, viria o tempo total $19^h—7'—31''$. Logo, este numero é um producto de dois factores, um dos quaes é $1^h—58'—51''$ e o outro é o numero pedido; e conseguintemente, dividindo o producto,

19h—7'—31", pelo factor conhecido, 1h—58'—51", obter-se-á em quociente o factor incognito. Fazendo isto, vem:

```
68851" | 7131"
 4672    9al 7can 3q  3195
   12                 ----
-------               7131
56064can
 6147
    4
------
24588q
 3195
```

Como a natureza da questão exige que o quociente seja da especie almudes, canadas e quartilhos, desde logo comprehender-se-á não só a necessidade de considerar o dividendo exprimindo almudes, sinão tambem a razão porque se tem reduzido, neste caso, ambos os termos a unidades de infima especie, o que importa convertel-os em numeros incomplexos e conseguintemente fazer desapparecer tanto num como noutro as subdivisões da hora, que são muito differentes das do almude.

E disso resulta que, depois de se ter achado o quociente 9 almudes, o resto 4672 deve ser considerado como representando almudes, que se convertem em canadas, multiplicando por 12, porque 1 almude tem 12 canadas; e vem o numero 56064 canadas, que dividido pelo mesmo divisor 7131, dá para quociente 7 canadas, e para resto 6147. Agora este resto representa canadas, que se convertem em quartilhos, multiplicando por 4, porque uma canada tem 4 quartilhos, e vem 24588 quartilhos, cuja divisão pelo mesmo divisor dá para quociente 3 quartilhos, e ainda um resto 3195, que introduz no quociente a fracção $\frac{3195}{7131}$ do quartilho. (E. de Sá.— Ob. Cit.).

III

Conversão das antigas ás novas medidas. Systema inglez de pesos e medidas; tabellas diversas; moedas estrangeiras e cambio

Medidas lineares. — Da comparação das grandezas expressas em varas e em metros, resulta que *10 varas são iguaes a 11 metros.*

Desta relação conclue-se immediatamente :

1°. Que 1 vara é igual a $\frac{11}{10}$ do metro, isto é a 1m,1;

. 2º., Que 1 metro é igual a $\frac{10}{11}$ da vara, ou a $0^v,909090\ldots$.

Estas duas relações são os coefficientes de conversão das medidas lineares; a primeira serve para passar das medidas lineares complexas ás decimaes; a segunda para passar das medidas lineares decimaes ás complexas.

Convertendo a fracção $\frac{10^v}{11}$ em numero complexo, vê-se que 1 metro equivale a 4^p—4^p—$4^l,36$.

Conhecido o valor da vara a respeito do metro, facil é calcular o valor dos multiplos e submultiplos da vara: 1^{br} igual a 2^v, igual a 2 vezes $1^m,1$, igual a $2^m,2$; 1^p igual a $\frac{1^v}{5}$, igual a $\frac{1^m,1}{5}$, igual a $0^m,22$; 1^p igual a $\frac{1^p}{8}$, igual a $\frac{0^m,22}{8}$, igual a $0^m,0275$.

Reciprocamente, sabendo que 1^m é igual a $\frac{10^v}{11}$ igual a $0^v,909090\ldots$ ou a 4^p—$4^p,36$, determina-se com facilidade o valor dos multiplos e submultiplos do metro:

Assim 1 decametro é igual a $9^v,09090\ldots$ ou a 45^p—$3^p,6$; 1 decimetro é igual a $0^v,09090\ldots$ ou a $3^p,636$.

Para comprehender o que fica dito, resolvamos o problema seguinte:

Problema I. — *Converter 7 varas 3 palmos e 5 pollegadas em metros.*

Sendo 1 vara igual a $1^m,1$, 7^v—3^p—5^p serão iguaes a $1^m,1$ multiplicados por aquelle numero complexo:

		$1^m,1$
		7^v — 3^p — 5^p
7^v		7,7
3^p	1	0,22
	2	0,44
5^p	4	0,11
	1	0,0275
		$8^m,4975$

Vimos, pois, que 7^v—3^p—5^p são iguaes a $8^m,4975$.

N. B. —Tendo o valor de 1 vara, o de 1 palmo e o de 1 pollegada em metros, poder-se-ia tambem resolver o problema multiplicando por

7 o valor de 1 vara, por 3 o de 1 palmo, por 5 o de 1 pollegada e sommando os productos:

7^v são iguaes a 7 vezes $1^m,1$, igual a $7^m,7$;
3^p são iguaes a 3 vezes $0^m,22$, igual a $0^m,66$;
5^p são iguaes a 5 vezes $0^m,0275$, igual a $0^m,1375$.

7 varas 3 palmos 5 pollegadas são iguaes a $8^m,4975$

Problema II. — Reciprocamente: *Transformar $8^m,4975$ em varas.*

Sendo 1 metro igual a $\frac{10^v}{11}$, o valor do numero dado será $\frac{10^v}{11}$ multiplicado por $8^m,4975$.

Ora, $\frac{10^v}{11}$ multiplicado por $8^m,4975$ igualam a $\frac{84^v,975}{11}$ igual a $7^v,725$ igual a 7^v mais $0^v,725$ multiplicado por 5^p que produzem 7^v—$3^p,625$ ou 7^v—3^p mais 0,625 multiplicado por 8^p, o que tudo produz 7^v—3_p—5^p.

N. B. — Tendo o valor de 1 metro, o de 1 decimetro, o de 1 centimetro e o de 1 millimetro em varas, poder-se-ia tambem resolver o problema multiplicando o primeiro valor por 8, o segundo por 4, o terceiro por 9 e o quarto por 7,5 e sommando os productos.

Emfim, como exercicio resolvamos a questão seguinte:

Sabendo que uma peça de seda com 20 metros custa 90000 réis, pergunta-se qual o preço do covado?

Tem-se uma relação muito approximada entre o metro e o covado observando-se que 2 metros são iguaes a 3 covados; donde se conclue que um covado equivale a $\frac{2}{3}$ do metro ou a $0^m,666....$

Nestas condições vê-se que 20^m equivalem a 30^c, de sorte que a solução do problema reduz-se a dividir 90000 réis por 30^c, o que dá 3000 réis para valor do covado.

Medidas de superficie. — Sendo 10^v iguaes a 11^m, conclue-se immediatamente que o quadrado construido sobre 10^v equivale ao construido sobre 11^m; de sorte que se chega assim á relação:

$$100^{v2} \text{ iguaes a } 121^{m2},$$

e desta deduzem-se as duas seguintes:

$$1^{v2} \text{ igual a } \frac{121^m}{100} \text{ igual a } 1^{m2},21;$$
$$1^{m2} \text{ igual a } \frac{100^{v2}}{121}.$$

Estas duas relações são os coefficientes de conversão das medidas de superficie; a primeira serve para passar do systema complexo ao decimal, a segunda do decimal ao complexo.

Por meio destes mesmos coefficientes converte-se um numero qualquer de geiras em aros, e vice-versa.

Problema I. — *Quantos hectaros e aros tem uma propriedade rural de 500 geiras de extensão?*

500 geiras são iguaes a 400^{br2} multiplicadas por 500, isto é a 200000^{br2}; ora, 1^{br2} sendo igual a 4^{v2}, igual a 4 vezes $1^{m2},21$, equivale a $4^{m2},84$; por conseguinte, 500 geiras são iguaes a $4^{m2},84$ multiplicados por 200000, ou a 968000^{m2}; e como o hectaro vale 10000^{m2} e o aro 100^{m2}, vemos finalmente que 500 geiras são iguaes a 96 hectaros e 80 aros.

Problema II. — Reciprocamente: *Quantas geiras tem uma propriedade rural de 96 hectaros e 80 aros?*

96 hectaros e 80 aros são iguaes a 9680 aros ou a 968000^{m2}.

Ora, vimos que $4^{m2},84$ são iguaes a 1^{br2} e portanto 484^{m2} valem 100^{br2}, donde 1^{m2} equivale a $\frac{100^{br2}}{484}$; logo, 968000^{m2} valerão 968000 multiplicado por $\frac{100}{484}$, igual a $\frac{96800000^{br2}}{484}$ igual ainda a 200000^{br2}; e como 1^{br2} é igual a $\frac{1}{400}$ da geira, 200000^{br2} são iguaes á $\frac{200000}{400}$ da geira, isto é a 500 geiras, que equivalem aos 96 hectaros e 80 aros.

Medidas de volume. — Sendo 10^{v} iguaes a 11^{m}, o cubo construido sobre 10^{v} será equivalente ao construido sobre 11^{m}, donde se conclue a relação seguinte:

$$1000^{v3} \text{ são iguaes a } 1331^{m3},$$

e destas deduzem-se as duas seguintes:

$$1^{v3} \text{ igual a } \frac{1331^{br3}}{1000}, \text{ igual a } 1^{m3},331;$$
$$1^{m3} \text{ igual a } \frac{1000}{1331}.$$

A primeira destas relações serve de coefficiente de conversão de varas cubicas em metros cubicos, e a segunda de metros cubicos em varas cubicas.

Medidas de capacidade.—Sendo uma pollegada igual a $0^{m},0275$, será 1^{p3} igual a $0^{m3},000020796875$; ora, um alqueire sendo igual

a 1744^{p3}, vemos portanto que 1^{alq} equivale a $0^{m3},000020796875$ multiplicado por 1744, ou a $0^{m3},03626975$, igual a $36^{l},26975$, ou approximadamente 1^{alq} igual a $36^{l},27$, coefficiente de conversão de alqueires em litros.

Uma canada sendo igual a 128^{p3}, segue-se que ella é igual a $0^{m3},000020796875$ multiplicado por 128, igual a $0^{m3},002662$, igual a $2^{l},662$; o coefficiente de conversão de canadas em litros é, pois, 1^{can} igual a $2^{l},662$.

Os coefficientes inversos são:

$$1 \text{ litro igual a } \frac{1^{alq}}{36,27}, \text{ igual a } 0^{alq},0275\ ;$$

$$1 \text{ litro igual a } \frac{1^{can}}{2,662}, \text{ igual a } 0^{can},375.$$

Medidas de peso. — A comparação do *marco* com os pesos decimaes conduz ás relações:

Um marco igual a $229^{g},525$, e 1 grammo igual a $0^{marco},0043568$, igual a $20^{grãos},076$, coefficientes de conversão de numeros que exprimem pesos no antigo systema em numeros que exprimem pesos no systema decimal, e reciprocamente.

Exemplo: *1 libra de manteiga custando 2000 réis, qual será o preço do kilogrammo?*

A libra tendo 2 marcos e um destes valendo, como vimos, $229^{g},525$, segue-se que a libra conterá 2 vezes $229^{g},525$ ou $459^{g},05$.

Ora, si 1 libra (ou $459^{g},05$) custa 2000 réis, 1^{g} valerá $\frac{2000}{459,05}$ e 1000^{g} (ou 1^{kg}) valerão 1000 vezes mais, isto é $\frac{2000000}{459,05}$ igual a 4357 réis.

Systema inglez de pesos e medidas. — Como entre todos os paizes que entretêm relações commerciaes com o Brazil, occupa a Inglaterra o primeiro logar, vamos expor o systema inglez de pesos e medidas.

Medidas de comprimento

Itinerarias. . .	League (*legua*) de 20 ao grão	3 miles (*milha*) marit.
	Mile (*milha*) maritima .	2025 yards (*jardas*).
	Mile (*milha*) terrestre. .	1760 yards (*jardas*).

De comprimentos ordinarios . .	Furlong.	220 yards.
	Rod, Pole, Perch. . .	5 1/2 yards.
	Fathom.	2 yards.
	Yard (*jarda*)	Unidade igual a 3 feet (*pés*).
	Foot (*pé*).	12 inches (*polegadas*).
	Inche (*polegada*) . . .	12 lines (*linhas*).

Medidas de superficie

Superficies ordinarias . . .	Square league. . . .	9 square miles.
	(*legua quadrada*) . . .	(*milha quadrada*).
	Square mile marit. . .	4100625 square yards.
	(*milha quadrada*) . . .	(*jardas quadradas*).
	Square mile terrest. .	3097600 square yards.
	(*milha quadrada*) . . .	(*jardas quadradas*).
	Square yard	9 square feet.
	(*jarda quadrada*) . . .	(*pés quadrados*).
	Square foot.	144 square inches.
	(*pé quadrado*)	(*poleg. quadrada*).
	Square inche	144 square lines.
	(*polegada quadrada*) . .	(*linhas quadradas*).
Medidas agrarias	Acre.	4 roods.
	Rood.	40 perches.
	Perch ou rod	30 1/4 square yards.

Medidas de volume

Solidez. . . .	Cubic yard.	27 cubic feet.
	(*jarda cubica*)	(*pés cubicos*).
	Cubic foot	1728 cubic inches.
	(*pé cubico*)	(*poleg. cubicas*).
	Cubic inche.	1728 cubic lines.
	(*polegada cubica*) . . .	(*linhas cubicas*).
Capacidade para seccos . . .	Chaldron.	12 sacks (*saccos*).
	Sack (*sacco*).	3 bushels (*alqueires*).
	Bushel (*alqueire*) . . .	4 pecks.
	Peck.	2 gallons.
	Gallon	Unidade igual a 4 quarts
	Quart.	2 pints.

Capacidade para cerveja. . .	Tun (*tonel*).	2 Butts (*pipas*).
	Butt (*pipa*).	2 Hogsheads.
	Hogshead	1 1/2 barrels (*barris*).
	Barrel (*barril*). . . .	2 Kilderkins.
	Kilderkin	2 Firkins.
	Firkin	9 Gallons.
	Gallon	Unidade igual a 4 quarts
	Quart.	2 Pints.

Capacidade para vinhos e espiritos. . . .	Tun	2 Pipes.
	Pipe.	2 Hogsheads.
	Hogshead	62 Gallons.
	Gallon	Unidade igual a 4 quarts
	Quart.	2 Pints.

Medidas de peso

Pesos ordinarios.	Ton (*tonellada*). . . .	20 Hundredweights. (*quintaes*).
	Hundredweight. . . .	4 Quarters.
	Quarter.	2 Stones.
	Stone.	14 Pounds.
	Pound (*libra*)	Unidade igual a 16 ounces igual a 7000 grains.
	Ounce (*onça*)	16 Drams (*drachmas*).

Pesos Troy (para ouro, prata, pedras preciosas, etc.). . . .	Pound Troy (*libra troy*) .	Unidade igual a 12 ounces igual a 5760 grains.
	Ounce (*onça*)	20 Penny-weights.
	Penny-weight. . . .	24 Grains.

Medidas monetarias. — A unidade monetaria é o *soberano* ou *libra esterlina*. A libra esterlina decompõe-se em 20 *shillings* e o *shilling* em 12 *pence* ou *dinheiros*.

O quadro seguinte explica a natureza e denominação das principaes moedas inglezas.

NATUREZA E DENOMINAÇÃO DAS MOEDAS		PESO LEGAL	TITULO LEGAL
Ouro	Soberano ou 20 shillings	7^g,98805	916,66
	1/2 Soberano ou 10 shillings	3^g,99402	916,66
Prata	Crown ou 5 shillings.	28^g,2759	925
	1/2 Crown ou 2 1/2 shillings	14^g,13795	925
	Florin ou 2 shillings.	11^g,31036	925
	Shilling ou 12 pence.	5^g,65518	925

Conserva-se ainda na Inglaterra o habito de contar por *guinéos* de 21 shillings por causa da antiga moeda deste nome, equivalente a 26^{fr},48.

Vamos completar êste estudo comparando a libra esterlina com a moeda de 20 francos.

O valor intrinseco de uma moeda obtem-se multiplicando o seu peso legal pelo respectivo *titulo*, expresso tambem em peso. Nestas condições, o valor intrinseco ou de ouro puro da libra esterlina obtem-se multiplicando 7^g,98805 por 0,91666, o que produz 7^g,3223259.

De outro lado, conforme a tabella nº. 2, vê-se que o valor intrinseco da moeda de 20 francos é igual ao producto de 6^g,45161 (peso legal) por 0,900 (titulo legal), o que fornece 5^g,806449 de ouro puro.

Ora, si 5^g,806449 de ouro puro formam 20 francos, segue-se que 1 franco conterá $\frac{5,806449}{20}$ do mesmo metal; por conseguinte, 7^g,3223259 valerão tantos francos quantas vezes contiver $\frac{5,806449}{20}$.

A questão reduz-se, pois, a dividir 7,3223259 por $\frac{5,806449}{20}$, o que equivale a multiplicar por 20 a relação $\frac{7,3223259}{5,806449}$, obtendo-se 25^{fr},2213.

Vamos concluir este paragrapho resolvendo tres problemas da mais alta importancia sob o ponto de vista das relações commerciaes do nosso paiz com o estrangeiro.

1º Problema. — *Exprimir a moeda ingleza em moeda brazileira, ouro.*

Vimos precedentemente que a quantidade de ouro puro contida na *libra esterlina* é representada por $7^g,3223259$.

Tomando para termo de comparação a nossa moeda de ouro de 10000 réis, acha-se o metal puro nella contido multiplicando o seu peso total $8^g,965$ pelo respectivo titulo 0,917 o que produz 8,220905.

Tomando a relação entre os *grãos de fino* das duas moedas e multiplicando-a pelo valor em réis da brazileira (10000 réis), obtem-se o valor da ingleza, isto é $\frac{73223,259}{8,220905}$ ou 8906,958. Tal é o verdadeiro valor da libra esterlina expressa em moeda de ouro do Brazil. Dividindo-o por 240 pence ou dinheiros, obtem-se tambem o valor do dinheiro que é, portanto, 37,112 réis.

Dividindo 1000 réis por este ultimo resultado, ter-se-á 26,945 para o numero de pence ou dinheiros contidos nesta quantia. Differindo aquelle numero em muito pouco de 27^d, considera-se ordinariamente 27^d como equivalendo a 1000 réis; e nesta hypothese o valor da libra torna-se igual ao producto de $\frac{1000}{27}$ por 240, isto é a 8889 réis, ordinariamente adoptado no commercio.

2º Problema.— *Exprimir a moeda franceza em moeda brazileira, ouro.*

Multiplicando $3^g,226$, peso da moeda de ouro de 10 francos, pelo respectivo titulo 0,900, obtem-se $2^g,9034$ para a quantidade de ouro puro contido nesta moeda.

Adoptando para a base de comparação a moeda brasileira de 10000 réis, ouro, determina-se o metal puro nella contido multiplicando o seu peso $8^g,965$ pelo seu titulo 0,917, o que produz $8^g,221$.

Tomando a relação entre os *grãos de fino* das duas moedas e multiplicando-a pelo valor em réis da brazileira (10000 réis), obtem-se o valor da franceza, isto é $\frac{29034}{8,221}$ ou 3531,68 réis.

A moeda de 1 franco sendo $\frac{1}{10}$ da de 10 francos, valerá portanto 353,168 réis. Tal é o verdadeiro valor do franco em moeda de ouro do Brazil.

3º Problema. — *Exprimir a moeda norte-americana em moeda brazileira, ouro.*

Sendo $1^g,672$ o peso do dollar de ouro e 0,900 o seu titulo, teremos a quantidade de ouro puroqu e contém, multiplicando estes dois numeros, o que produz $1^g,505$.

Adoptemos para termo de comparação a nossa moeda de ouro de 10000 réis, cujo grão de metal puro é, como vimos, $8^{g},221$. Tomando a relação entre os grãos de fino das duas moedas e multiplicando-a pelo valor da nossa (10000 réis), ter-se-á o resultado procurado, isto é $\frac{15050}{8,221}$ ou 1830,67 réis. Tal é o valor do dollar relativamente ao da nossa moeda de ouro.

TABELLAS DIVERSAS

N. 1

Antigas medidas brazileiras e sua conversão

Grandezas	Systema brazileiro	Systema metrico decimal	Systema inglez
Medidas lineares: comprimentos ordinarios e itinerarios.	Legua de 20 ao grão	$5555^{m},55$ ou $5^{km},555$	$1^{league\ marit.}$
	Milha de 60 ao grão	1851,83 ou 1,852	1^{mile} marit.
	Braça	$2^{m},2$	$2^{yards},4059$
	Vara	1,1	1 » ,2029
	Covado	0,68	0 » ,7436
	Pé	0,33	0 » ,3609
	Palmo	0,22	0 » ,2406
	Pollegada	0,0275	0 » ,0301
Medidas de superficie: ordinarias, agrarias e topographicas.	Legua quadrada	$30^{km2},8642$	$1^{league\ marit.\ q.}$
	Milha quadrada	3,4293	1^{mile} marit. q.
	Geira	$19^{aros},36$	$2315^{y2},4560$
	Braça quadrada	0,0484	5,7886
	Vara quadrada	$1^{m2},21$	1,4471
	Palmo quadrado	0,0484	0,0578
	Pollegada quadrada	0,000756	0,0009
M. de solidos	Vara cubica	$1^{m3},331$	$1^{y3},74$
	Palmo cubico	0,010648	0,0139
	Pollegada cubica	0,000207968	0,000027
M. de capacidade: seccos e liquidos.	Pipa	$4^{hl},788$	$105^{gallons},376$
	Almude	$31^{l},92$	7 » ,025
	Canada	2,66	0 » ,585
	Quartilho	0,665	0 » ,146
	Moio	$21^{hl},762$	478 » ,959
	Fanga	1,4508	31 » ,928
	Alqueire	$36^{l},27$	7 » ,932
	Quarta	9,067	1 » ,995
	Selamim	2,267	0 » ,499

Antigas medidas brazileiras e sua conversão (cont.)

Grandezas	Systema brazileiro	Systema metrico decimal	Systema inglez	
Medidas de peso . .	Tonellada	$793^{kg},2384$	$1749^{pound},9906$	
	Quintal	58,7584	120 » ,5622	
	Arroba	14,6896	32 » ,3905	
			pound	p. troy
	Libra.	$459^{g},05$	1,0122	1,2304
	Marco.	229,525	0,5059	0,6152
	Onça	28,6906		0,0769
	Oitava.	3,5863	$55^{grains},339$	
	Grão	0,0498	0 » ,768	

N. 2

Moedas francezas

Metal	Valor em francos	Peso em grammos	Diametro em millimetros	Tolerancia em peso
Moedas de ouro	Francos	Grammos	Millimetros	Grammos
	Moedas de 100.	32,25806	35	0,001
	» » 50.	16,12903	28	0,002
	» » 20.	6,41161	21	0,002
	» » 10.	3,22580	19	0,002
	» » 5.	1,61290	17	0,003
Moedas de prata	Francos	Grammos	Millimetros	Grammos
	Moeda de 5	25	37	0,003
	» » 2	10	27	0,005
	» » 1	5	23	0,005
	» » 0,50	2,5	18	0,007
	» » 0,20	1	16	0,010
Moedas de bronze	Francos	Grammos	Millimetros	Grammos
	Moeda de 0,10	10	30	0,010
	» » 0,05	5	25	0,010
	» » 0,02	2	20	0,015
	» » 0,01	1	15	0,015

N. 3

Valores das principaes moedas estrangeiras expressas em francos

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
INGLATERRA				
(Lei monetaria de 4 de abril de 1870)				
Unidade monetaria: Libra esterlina de 20 shillings, igual a 25fr,2213				
Ouro				
5 Libras	36,2	39,94028	916 2/3/1000	126,10
2 Libras	29,4	15,97611	»	50,44
1 Libra (soberano)	22,4	7,98805	»	25,22
1/2 Libra	19,3	3,99402	»	12,61
Prata				
Coroa	38,8	28,2759	925/1000	5,81
Duplo Florin	36,1	22,62072	»	4,64
Meia Coroa	32,3	14,13795	»	2,91
Florin	28,5	11,31036	»	2,32
Shilling	23,5	5,65518	»	1,16
6 Pence	19,5	2,82759	»	0,58
4 »	17,5	1,88506	»	0,39
3 »	16,3	1,41379	»	0,29
2 »	13,5	0,94253	»	0,19
1 Penny	11	0,47126	»	0,095

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
ALLEMANHA				
(Leis monetarias de 4 de dezembro de 1873 e de 9 de julho de 1873)				
Unidade monetaria: Reischsmark de 100 pfenning, igual a 1fr,111				
Ouro				
20 Markos.	22,5	7,965	900/1000	24,69
10 »	19,5	3,982	»	12,34
5 »	17	1,991	»	6,17
Prata				
5 Markos.	38	27,778	900/1000	5,56
2 »	28	11,111	»	2,22
1 »	24	5,556	»	1,11
50 Pfenning	20	2,778	»	0,56
20 »	16	1,111	»	0,22
ESTADOS-UNIDOS				
(Leis monetarias de 12 de fevereiro de 1873 e 1878)				
Unidade monetaria : Dollar de ouro de 100 cents, igual a 5fr,183				
Ouro				
Dupla-aguia, 20 dollars . . .	34	33,436	900/1000	103,65
Aguia, 10 dollars	27	16,718	»	51,83
1/2 Aguia, 5 dollars	22	8,359	»	25,91
1/4 Aguia, 1 1/2 dollars . . .	18	4,179	»	12,955
Dollar	13	1,672	»	5,18

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
Prata				
Dollar, 100 cents.	38	26,729	900/1000	5,34
1/2 Dollar.	30	12,5	»	2,50
1/4 Dollar.	24	6,25	»	1,25
Dime, 100 cents.	18	2,5	»	0,50
PORTUGAL				
(Lei monetaria de 29 de Julho de 1854)				
Moeda de conta: Mil réis, igual a $5^{fr},60$				
Ouro				
Coroa, 10 mil réis	30	17,735	916 2/3/1000	56
1/2 Coroa, 5 mil réis	23	8,868	»	28
1/5 » 2 mil réis	18,5	3,547	»	11,20
1/10 » 1 mil réis	14	1,774	»	5,60
Prata				
5 Tostões, 500 réis.	30	12,5	916 2/3/1000	2,80
2 Tostões, 200 réis	23	5	»	1,12
1 Tostão, 100 réis	18,5	2,5	»	0,56
1/2 Tostão, 50 réis	14	1,25	»	0,28

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
ITALIA				
(Leis monetarias de 24 de abril de 1862 e de 21 de julho de 1866)				
Unidade monetaria: Lyra, igual a 1fr				
Ouro				
100 lyras	35	32,258	900/1000	100
50 lyras	28	16,129	»	50
20 lyras	21	6,4516	»	20
10 lyras	19	3,2258	»	10
5 lyras.	17	1,6129	»	5
Prata				
5 lyras.	37	25	900/1000	5
2 lyras.	27	10	835/1000	2
1 lyra	23	5	»	1
50 centesimos.	18	2,5	»	0,50
20 centesimos.	16	1	»	0,20
HESPANHA				
(Systema monetario creado pela lei de 19 de outubro de 1868, e baseado sobre a convenção concluida em 1865 entre os paizes da União Latina, da qual entretanto não faz parte)				
Unidade monetaria : Peseta de 100 centimos, igual a 1fr				
Ouro				
100 pesetas	35	32,25806	900/1000	100
50 »	28	16,12903	»	50

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Va'or ao par em francos
25 pesetas	23	8,06451	900/1000	25
20 »	21	6,45161	»	20
10 »	19	3,2258	»	10
5 »	17	1,6129	»	5
Prata				
5 pesetas	37	25	900/1000	5
2 pesetas	27	10	»	2
1 peseta	23	5	835/1000	1
50 centimos	18	2,5	»	0,50
20 centimos	16	1	»	0,20
HOLLANDA				
(Leis monetarias de 26 de novembro de 1847 e de 6 de junho de 1875)				
Unidade monetaria : Florin de 100 cents, igual a $2^{fr},08$				
Ouro				
duplo ducado	26	6,988	983/1000	23,54
ducado . , ...	21	3,494	»	11,77
10 florins	22,5	6,72	900/1000	20,83
Prata				
2 1/2 florins	38	25	945/1000	5,20
1 florin.	28	10	»	2,08
1/2 florin	22	5	»	1,04
25 cents	19	3,575	640/1000	0,50
10 cents	15	1,400	»	0,20
5 cents.	12,5	0,685	»	0,10

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
ARGENTINA				
(Lei de 5 de novembro de 1881)				
Unidade monetaria: **Peso**, igual a 5fr				
Ouro				
argentino	22	8,0645	900/1000	25
1/2 argentino.	19	4,0322	»	12,50
Prata				
1 peso	37	25	900/1000	5
50 contavos	30	12,5	»	2,50
20 »	23	5	»	1
10 »	18	2,5	»	0,50
5 »	16	1,25	»	0,25
URUGUAY				
Unidade monetaria: **Peso nacional** ou piastra de 10 reales, peso idéal supposto pesar 1g,697 a 917/1000, cujo valor ao par, na moeda franceza é de 5fr,361. Não ha moeda nacional de ouro. As unicas moedas especiaes são as seguintes:				
Prata				
1 peso	37	25	900/1000	5
50 centesimos.	33	12,5	»	2,50
20 »	23	5	»	1
10 »	18	2,5	»	0,50

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
CHILE				
(Leis monetarias de 9 de janeiro de 1851 e de 25 de outubro de 1870)				
Unidade monetaria : Peso ou piastra de 100 centavos, cujo valor está sujeito as fluctuações do cambio				
Ouro				
Condor, 20 pesos	27	11,98207	916 2/3/1000	35,95
Dobrão, 5 pesos.	21	5,99103	»	17,97
Escudo, 5 pesos.	16,5	2,99551	»	8,98
Prata				
Peso.	35	20	835/1000	4
20 centavos	21,5	4	»	0,80
10 »	17	2	»	0,40
5 »	14,5	1	»	0,20
BOLIVIA				
Unidade monetaria : Boliviano ou peso de prata (piastra), cuja valor ao par, em moeda franceza, é de 5 francos				
Prata				
Boliviano	35	25	900/1000	5
50 centavos	30	12,5	»	2,50
20 »	23	4,5	»	1
10 »	18	2,25	»	0,50
5 »	15	1,125	»	0,25

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
PERU'				
(Lei monetaria de 14 de fevereiro de 1864)				
Moeda de conta: Sole de 10 dinero ou 100 centavos, igual a 5 francos				
Ouro				
Libra	22	7,988	916 2/3/1000	20
1/2 libra	19,3	3,994	»	10
Prata				
Sole.	37	25,0	900/1000	5
1/2 solo	30	12,5	»	2,50
1/5 sole	23	5,0	»	1
Dinero	18	2,5	»	0,50
1/2 dinero.	15	1,25	»	0,25
JAPÃO				
(Lei monetaria de 1897)				
Unidade monetaria: Yen peso de 2 fun (750 milligrammos) de ouro fino				
Ouro				
20 yen		16,6665	900/1000	51,66
10 »		8,3333	»	25,83
5 »		4,1666	»	10,33

NOMES DOS PAIZES E DAS MOEDAS	Diametro	Peso legal em grammos	Titulo legal em millesimos	Valor ao par em francos
Prata				
50 sen		13,4783	800/1000	2,57
20 »		5,3914	»	1,02
10 »		2,6955	»	0,51

NOTA

A França, a Belgica, a Suissa e a Italia, por uma convenção monetaria, chamada *União Latina*, adoptaram o mesmo systema de moedas, embora com denominação differente para a Italia. Outros paizes, como a Hespanha, a Finlandia, a Grecia, a Venezuela, a Rumania, a Bulgaria e a Servia, adoptaram os mesmos typos monetarios sem entretanto fazerem parte da convenção.

Na Bulgaria, por exemplo, a unidade monetaria é o *lev* dividido em 100 *stotinks*, valendo 1 franco; na Servia é o *dinar* de 100 *paras*, tambem igual a 1 franco.

N. 4

Algumas moedas estrangeiras convertidas em moeda brazileira, com o cambio ao par

NAÇÕES	MOEDAS	METAL	VALORES EM RÉIS
Austria-Hungria	Krone	Prata.	$370
Belgica e Suissa.	Franco.	»	$353
Costa Rica.	Peso ou piastra.	»	1$765
Dinamarca.	Krone	»	$490
Egypto.	Libra egypcia (100 piastras).	Ouro	9$044
Equador	Sucre	Prata.	1$765
Finlandia	Markka (1 franco)	»	$353
Grecia	Drachma (de 100 lepta). . .	»	$353
Guatemala e Honduras. . .	Piastra, ou peso	»	1$765
Haiti.	Gourde.	»	1$765
India Ingleza.	Rupia (16 annás)	»	$840
Japão	Yen (100 sen).	»	$897
Columbia	Peso (100 centavos). . . .	»	1$765
Mexico.	Peso ou piastra.	»	1$917
Nicaragua.	Piastra (100 reales). . . .	»	1$765
Panamá.	Balboa (2 pesos ou piastra) .	Ouro	1$765
Percia	Kran (100 dinars)	Prata.	$324
Romania	Leu (100 bani).	»	$353
Russia	Rublo	»	$940
Salvador	Peso ou piastra.	Ouro	1$765
Suecia e Noruega	Krona	Prata.	$490
Turquia.	Piastra (40 paras)	»	$078
Uruguay	Peso.	»	1$765
Venezuela.	Bolivar (100 centavos). . .	»	$353
China	Piastra.	»	1$900
Zamzibar	Dollar	«	1$920

Observação sobre as tabellas precedentes: cambio das moedas

O valor nominal do nosso papel moeda não corresponde ao seu valor actual em ouro, em consequencia de sua inconvertibilidade immediata no metal equivalente por conta do governo. Esta circumstancia e outros factores de ordem economica e politica determinam com certo agio sobre o ouro e a prata amoedados na sua troca pelo papel moeda brazileiro. A esta operação é que se chama *cambio*.

Por ser a Inglaterra o paiz que entretem maiores relações commerciaes com o Brazil, a taxa de cambio é ordinariamente fixada em moeda ingleza. Já vimos que a relação desta moeda para com a nossa é mui approximadamente de 27^d por 1000 réis em ouro. Dahi se póde deduzir facilmente qual o papel moeda equivalente a uma certa somma de moedas metallicas, nacionaes ou estrangeiras, e vice-versa. Para isso basta conhecer então a taxa cambial em vigor para o paiz de que se trata, ou simplesmente para a Inglaterra, e combinal-a com a quantia proposta, como se vê nos exemplos seguintes:

1.º Seja proposto *determinar a quantia necessaria para o pagamento de* $23^{£} — 10^s — 9^d,6$, *ao cambio de 16.*

Duas marchas podem ser seguidas: converter a quantia proposta em dinheiros e dividir o resultado pelo numero de dinheiros equivalentes a 1000 réis, ao cambio de 16; ou determinar previamente o valor da libra sob a mesma taxa cambial, e multiplical-o pelo numero complexo proposto. Nesta segunda marcha poder-se-ia tambem multiplicar separadamente as libras, soldos e dinheiros pelos valores respectivos ao citado cambio e sommar os resultados.

Adoptando a primeira marcha, teriamos $5649^d,6$. Como, porém, 16^d valem 1000 réis, é claro que $5649^d,6$ conterão tantos mil réis quantas vezes contiverem 16^d: A questão reduz-se, pois, a dividir aquelle numero por este, o que produzirá 353100 para o resultado procurado.

Empregando a segunda marcha, multiplicaremos por $23^{£} — 10^s — 9^d,6$ o preço da libra ao cambio de 16. Para obtel-o notemos que si 16^d valem 1000 réis, 1^d valerá $\frac{1000}{16}$ e, portanto, $1^{£}$ ou 240^d valerão 240 vezes $\frac{1000}{16}$ ou $\frac{240000}{16}$, isto é 15000 réis. Multiplicando,

pois, 15000 réis pelo numero complexo dado, obteremos, de accôrdo com o processo já exposto, 353100 réis.

Ordinariamente substitue-se esta operação por tres outras multiplicações : na primeira, forma-se o producto de $23^{£}$ por 15000 réis, preço da libra, obtendo-se 345000 réis ; na segunda, multiplica-se 10^{s} pelo preço de 1^{s} (que é igual a $\frac{15000}{20}$ ou 750 réis, porque o soldo é $\frac{1}{20}$ da libra), o que produz 7500 réis ; emfim, na terceira, forma-se o producto de $9^{d},6$ pelo preço do dinheiro (que é igual a $\frac{750}{12}$, porque o dinheiro é $\frac{1}{12}$ do soldo), achando-se 600 réis. Fazendo a somma de taes productos parciaes, obtem-se o producto total buscado, 353100 réis.

2.° Proponha-se ainda *determinar a quantia necessaria para o pagamento de* $601^{fr},53$, *ao cambio de* $16\frac{1}{4}$ *sobre Londres.*

Desde que se conheça o preço do franco em réis sob esta taxa cambial, a questão ficará reduzida a dividir a quantia proposta por este valor. Para obtel-o notemos que ao cambio de 27^{d} vale 1 franco 353,168 réis e que, portanto, valerá mais á taxa de $16\frac{1}{4}$. Com effeito, si sob o cambio de 27^{d} vale 1 franco 353,168 réis, á taxa de 1^{d} valerá 27 vezes 353,168, logo ao cambio de $\frac{65}{4}$ valerá $\frac{27 \text{ vezes } 353,168}{\frac{65}{4}}$ ou $\frac{9535,5}{4}$, igual a $\frac{38142}{65}$, isto é a 587 réis mui approximadamente.

Obtido assim o valor do franco, só nos resta multiplicar por elle a quantia proposta, o que produzirá 353097 réis, que é a quantia procurada.

O que acabamos de fazer mostra claramente que, *sendo conhecido o cambio sobre Londres, para obtel-o sobre Paris, bastará multiplicar 27 por 353,168 e dividir o producto pela taxa cambial em vigor.*

3.° Seja proposto *calcular o valor de 353100 réis, papel, em moeda ingleza, ao cambio de* 16^{d}.

Esta taxa cambial nos mostra que 1000 réis contém 16^{d} ; portanto 353100 réis conterão tantas vezes 16^{d} quantas contiver 1000 réis. A questão reduz-se, pois, a multiplicar a quantia proposta por 16 e dividir o producto por 1000, obtendo-se assim $5649^{d},600$. Convertendo em libras este numero de dinheiros, chega-se a $23^{£}-10^{s}-9^{d},6$.

O resultado póde vir logo expresso em libras, desde que se resolva a questão como se faz ordinariamente, isto é dividindo a

quantia proposta pelo valor da libra, ao cambio de 16. Obtem-se este valor observando que si 16^d valem 1000 réis, 1^d valerá $\frac{1000}{16}$ e, conseguintemente, $1^£$ ou 240^d valerá 240 vezes $\frac{1000}{16}$ ou $\frac{240000}{16}$, isto é 15000 réis.

Dividindo agora 353100 por 15000 réis, obtem-se o resultado precedente.

Esta solução, bem como a da questão inversa (1º exemplo), nos deixa vêr que *sendo conhecido em dinheiros a taxa cambial, basta dividir por ella o producto de 27 por 8889 para obter o preço da libra em papel moeda.*

4.º *Calcular o valor de 353100 réis, papel, em moeda franceza, ao cambio de* $16 \frac{1}{4}$.

Adoptando a marcha precedente, bastará dividir a quantia proposta pelo valor de 1 franco ao cambio de $16 \frac{1}{4}$.

Para obter esse valor note-nos que 1^{fr} vale 353,168 réis ao cambio de 27^d, que valerá 353,168 vezes 27 sob a taxa 1^d e que, portanto, valerá $\frac{353,168 \text{ vezes } 27}{16 \frac{1}{4}}$, ao cambio de $16 \frac{1}{4}$.

Effectuando este calculo, obteremos 587 para valor do franco. Dividindo por este numero a quantia proposta, 353100, virá finalmente $601^{fr},53$ para a quantia pedida.

5.º *Exprimir em papel moeda o valor da moeda brazileira de 20000 réis, ouro, ao cambio de* $15 \frac{1}{4}$ *e converter o resultado a moeda portugueza.*

Pela comparação que fizemos entre as moedas de ouro brazileira e ingleza (libra esterlina), deduz-se facilmente que, ao cambio de 27^d a nossa moeda de 20000 réis vale $2^£ \frac{2222}{8889}$, isto é, $2^£ — 4^s — 11^d,99$; de sorte que se póde consideral-a equivalente a $2^£$ e 5^s ou a 540^d. Ora, o cambio estando a $15 \frac{1}{4}$ ou $\frac{61^d}{4}$ por 1000 réis papel, é evidente que a nossa moeda valerá tantas vezes 1000 réis quantas contiver $\frac{61^d}{4}$. A questão reduz-se, pois, a multiplicar 540^d por 1000 e dividir o producto por $\frac{61^d}{4}$, o que produzirá 35409 réis, papel.

A nossa moeda de 20000 réis valendo 10000 réis em Portugal (*dinheiro forte*), vê-se que ao cambio de $15 \frac{1}{4}$, 10000 réis portuguezes valem aqui 35409 réis papel. Dahi se conclue que 1000 réis *fortes* valerão $\frac{35409}{10}$, isto é 3541 réis *fracos*.

Conhecendo a taxa cambial sobre Londres, é facil determinar o valor da moeda portugueza, expresso no nosso papel moeda. Porque si 1000 réis fracos equivalem a 27^d, 1000 réis fortes valerão o dobro, isto é, 2 vezes 27^d ou 54^d, estando o cambio ao par. De sorte que conhecido o preço da libra esterlina, qualquer que seja a taxa cambial, ter-se-á o valor de 1000 réis fortes em papel moeda brazileira, multiplicando aquelle preço por 54 e dividindo o producto por 240 ou, o que é o mesmo, multiplicando-o pela fracção $\frac{9}{40}$ ou 0,225. Com effeito, si 1$^£$ ou 240^d vale, por exemplo, 15737, ao cambio de 15 $\frac{1}{4}$, 1^d valerá $\frac{15737}{240}$, e, portanto, 54^d ou 1000 valerão 15737 vezes $\frac{54}{240}$, isto é 15737 multiplicado por $\frac{9}{40}$ ou por 0,225, o que produzirá 3541 réis para o valor de 1000 réis fortes.

Vê-se assim que sendo 15 $\frac{1}{4}$ o nosso cambio sobre Londres, será 3,541 a taxa cambial sobre Portugal.

Si em lugar do preço da libra fôr conhecido simplesmente o cambio expresso em dinheiro, bastará dividir por elle o producto de 27^d por 2000 réis, isto é 54000 réis, para obter a taxa cambial sobre a moeda portugueza. Assim é, por exemplo, que o quociente de 54000 réis pela taxa cambial de 15 $\frac{1}{4}$ dá 3541 réis, resultado já obtido precedentemente para o preço de 1000 réis fortes no nosso papel moeda.

N. 5

Taxas cambiaes necessarias na actualidade

Cambio	Inglaterra Libra	França Franco	Allemanha Marco	Est. Unidos Dollar
15.	16$000	$635	$785	3$295
15 1/4.	15$737	$625	$772	3$241
15 1/2.	15$483	$615	$759	3$189
15 3/4.	15$238	$605	$747	3$138
16	15$000	$596	$736	3$089
16 1/4.	14$769	$587	$724	3$042
16 1/2	14$545	$578	$713	2$996
16 3/4	14$328	$569	$703	2$951
17	14$117	$561	$692	2$908
17 1/4	13$913	$552	$682	2$865
17 1/2	13$714	$545	$672	2$824
17 3/4	13$521	$537	$663	2$785
18	13$333	$529	$654	2$746
18 1/4	13$150	$522	$645	2$708
18 1/2	12$972	$515	$636	2$672
18 3/4	12$800	$508	$628	2$635
19	12$631	$502	$619	2$601
19 1/4	12$467	$495	$611	2$568
19 1/2	12$307	$489	$603	2$535
19 3/4	12$151	$482	$596	2$503
20	12$000	$476	$588	2$471
20 1/4	11$851	$471	$581	2$441
20 1/2	11$707	$465	$574	2$411
20 3/4	11$566	$459	$567	2$382
21	11$428	$454	$560	2$354
21 1/4	11$294	$448	$554	2$326
21 1/2	11$162	$443	$547	2$299
21 3/4	11$034	$438	$541	2$272

INDICE

PARAGRAPHOS	ASSUMPTOS	PAGINAS
	DEDICATORIA	
	PREFACIO	
	Motivos que determinaram a redacção e publicação destes *Apontamentos*. Sua orientação geral, plano a que obedece e destino especial.	V
	INTRODUCÇÃO	
	Duplo objecto dos conhecimentos humanos; destino da Sciencia; importancia da abstracção. Classificação das Sciencias. Constituição da *philosophia segunda* e da *philosophia primeira*; leis da *philosophia primeira*. *Philosophia terceira*.	IX
	PRIMEIRA PARTE	
	Apreciação Geral do Calculo Arithmetico	
	CAPITULO I	
	CONCEPÇÃO DA MATHEMATICA OU LOGICA; POSIÇÃO DO SEU ESTUDO, DONDE A APRECIAÇÃO DO LUGAR QUE OCCUPA A ARITHMETICA NO CONJUNCTO DO SABER HUMANO	
§ 1	Concepção da Mathematica; posição do seu estudo. . .	3
§ 2	Objecto da Mathematica; sua constituição	7
§ 3	Comparação dos tres elementos da Mathematica; decomposição do calculo.	9
	CAPITULO II	
	THEORIA SUBJECTIVA DOS NUMEROS	
	(Theoria geral das concepções numericas: advento subjectivo de similhantes noções; e etc)	
§ 4	Advento subjectivo das concepções numericas. Exame da linguagem sobre o aspecto numerico.	13
§ 5	Advento e propriedades subjectivas dos primeiros numeros	18
§ 6	Transformação objectiva das concepções numericas. . .	31

PARAGRAPHOS	ASSUMPTOS	PAGINAS
	SEGUNDA PARTE	
	Instituição Fundamental da Arithmetica	
	CAPITULO III	
	THEORIA GERAL DA NUMERAÇÃO	
§ 7	Advento, objecto e destinação do surto systematico da escala arithmetica	41
§ 8	Concepção systematica da escala numerica	50
§ 9	Expressão da escala numerica.	59
	CAPITULO IV	
	INSTITUIÇÃO DA NUMERAÇÃO NORMAL: SYSTEMA DE NUMERAÇÃO SEPTIMAL, ABSTRACTA E CONCRETA. APRECIAÇÃO DOS CALCULOS NECESSARIOS PARA MUDAR O SYSTEMA EM QUE OS NUMEROS SE ACHAM ESCRIPTOS	
§ 10	Instituição da numeração septimal; sua comparação com a decimal	72
§ 11	Apreciação geral da numeração concreta	79
§ 12	Apreciação dos calculos necessarios para mudar o systema em que os numeros se acham representados	88
	CAPITULO V	
	THEORIA NUMERICA DA ORDEM	
	(Theoria das permutações, arranjos, combinações e repartições)	
§ 13	Objecto desta theoria. Solução espontanea e directa dos problemas das permutações, arranjos e combinações .	104
§ 14	Solução systematica dos tres problemas das permutações, arranjos e combinações.	125
§ 15	Consequencias da theoria numerica da ordem. Theoria das repartições.	138
	TERCEIRA PARTE	
	Coordenação Especial da Arithmetica	
	CAPITULO VI	
	THEORIA DO CALCULO FETICHICO: ADDIÇÃO, SUBTRACÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DOS NUMEROS INTEIROS	
§ 16	Concepção geral das avaliações	155
§ 17	Theoria da addição e da subtracção.	160
§ 18	Theoria da multiplicação	180

PARAGRAPHOS	ASSUMPTOS	PAGINAS
	CAPITULO VII	
	INSTITUIÇÃO FUNDAMENTAL DO CALCULO THEOCRATICO	
§ 19	Concepção da divisão.	197
§ 20	Instituição systematica da divisão	211
§ 21	Divisibilidade dos numeros. Provas das operações pelos divisores	229
	CAPITULO VIII	
	APRECIAÇÃO DAS REACÇÕES DO CALCULO THEOCRATICO SOBRE AS CONCEPÇÕES NUMERICAS	
	(Instituição das fracções ordinarias)	
§ 22	Concepção das fracções ordinarias.	251
§ 23	Reducção das fracções á sua expressão mais simples. Duplo processo para effectual-a: primeiro processo, baseado na decomposição em factores primos . . .	270
§ 24	Simplificação das fracções. Segundo processo baseado na determinação do maior divisor commum.	285
	CAPITULO IX	
	EXTENSÃO ADQUIRIDA PELO CALCULO FUNDAMENTAL EM VIRTUDE DA INSTITUIÇÃO FRACCIONARIA	
	(Addição, subtracção, multiplicação e divisão das fracções ordinarias)	
§ 25	Theoria da isomeria das fracções	300
§ 26	Extensão das operações fetichicas ás fracções	315
§ 27	Extensão da divisão ás fracções	327
	CAPITULO X	
	APERFEIÇOAMENTO MONOTHEICO DO CALCULO FRACCIONARIO EM CONSEQUENCIA DO ASCENDENTE DA ACTIVIDADE INDUSTRIAL. (SIMPLIFICAÇÃO DA AVALIAÇÃO FRACCIONARIA EM CONSEQUENCIA DA ADOPÇÃO SYSTEMATICA DAS POTENCIAS DA BASE NUMERAL COMO TAXA DE SUBDIVISÃO)	
§ 28	Instituição philosophica desta questão	336
§ 29	Calculo das fracções basicas	343
§ 30	Reducção systematica do calculo fraccionario qualquer ao caso das fracções basicas. Fracções decimaes e septimaes	366

PARAGRAPHOS	ASSUMPTOS	PAGINAS
	PARTE COMPLEMENTAR	
	CAPITULO XI	
	COMPLEMENTO THEOCRATICO DO CALCULO FUNDAMENTAL. (THEORIA DA RAIZ QUADRADA); REACÇÃO DE SIMILHANTE ACCRESCIMO SOBRE AS CONCEPÇÕES NUMERICAS. NUMEROS INCOMMENSURAVEIS	
§ 31	Concepção da theoria da raiz quadrada	383
§ 32	Instituição fundamental da pesquiza systematica da raiz quadrada dos numeros inteiros.	397
§ 33	Extracção da raiz quadrada das fracções	412
	CAPITULO XII	
	GENERALISAÇÃO DO ESPIRITO ARITHMETICO MEDIANTE A SIMPLIFICAÇÃO DAS AVALIAÇÕES, PELO APROVEITAMENTO DAS LEIS ESPECIAES EXISTENTES ENTRE OS NUMEROS COMBINADOS. THEORIA DAS PROGRESSÕES ARITHMETICAS; SURTO DECISIVO DESTA THEORIA MEDIANTE O ESTUDO DOS NUMEROS FIGURADOS	
§ 34	Papel desta theoria no estudo fundamental do calculo arithmetico.	432
§ 35	Theoria das progressões arithmeticas	440
§ 36	Avaliação das series dos numeros figurados	454
	CONCLUSÃO	
	Resumo, juizo e resultados do estudo do Calculo Arithmetico	471
	APPENDICE	
	NUMERAÇÃO CONCRETA USADA NO BRAZIL ATÉ A ADOPÇÃO DO SYSTEMA METRICO DECIMAL: NUMEROS COMPLEXOS QUE EXPRIMEM AS DIVERSAS MEDIDAS. CALCULO DOS NUMEROS COMPLEXOS. CONVERSÃO DAS ANTIGAS ÁS NOVAS MEDIDAS. SYSTEMA INGLEZ DE PESOS E MEDIDAS; TABOAS DE CONVERSÃO; MOEDAS ESTRANGEIRAS E CAMBIO	
I	Diversas especies de medidas	487
II	Calculo dos numeros complexos	500
III	Conversão das antigas ás novas medidas. Systema inglez de pesos e medidas; tabellas diversas; moedas estrangeiras e cambio	515

ERRATA

Estando o autor muito atarefado na elaboração dos « Apontamentos de Algebra », não lhe foi possivel rever, nem ler este trabalho depois de impresso para organizar a respectiva errata.

Num relanciar de olhos percebeu, porém, as seguintes incorrecções:

A' pagina 41, no numero do paragrapho, a lettra Z em logar da lettra grega ζ ; á nota da pagina 28, *Synarelle*, *croise* e *croyes*, que se deve ler *Sganarelle*, *croire* e *croyez*, e á pagina 91, 10ª linha, *por isso a que base*... em vez de *por isso que a base*...

Ha naturalmente pequenos erros orthographicos, como em algumas paginas, a palavra addição e seus derivados escriptos com *cç*, que o leitor facilmente corrigirá.

Rio, 30 de Agosto de 1907.

5930 —06 – Rio de Janeiro — Imprensa Nacional — 1907